

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR



TRABAJO FIN DE MASTER

**ANÁLISIS MULTIFACTOR DE SERIES TEMPORALES
FINANCIERAS MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN EN
SUBESPACIOS**

Máster Universitario en Investigación e Innovación en TIC

Álvaro Diéguez Sánchez-Largo
Septiembre 2013

ANÁLISIS MULTIFACTOR DE SERIES TEMPORALES FINANCIERAS MEDIANTE DESCOMPOSICIÓN EN SUBESPACIOS

AUTOR: Álvaro Diéguez Sánchez-Largo
TUTOR: Joaquín González Rodríguez

Grupo de investigación ATVS
Dpto. de Tecnología Electrónica y de las Comunicaciones
Escuela Politécnica Superior
Universidad Autónoma de Madrid
Septiembre 2013

Resumen

Un objetivo de la ingeniería financiera es el análisis de las series temporales financieras. Para poder realizar análisis, estimaciones y predicciones más precisas, se hace necesario el uso de modelos econométricos. Debido a las debilidades de los modelos econométricos clásicos, se hace necesario incluir una serie de factores de riesgo y se desarrollan los modelos multifactor. Estos factores son variables cuyo cambio afecta al valor de los activos de alguna forma. Modelar estos factores y estas dependencias puede ayudar a una mejor estimación de los mismos.

La finalidad, por tanto, del Trabajo Fin de Master de Álvaro Diéguez Sánchez-Largo ha sido la implementación de un sistema de análisis multifactor que, mediante el uso de subespacios, permita aportar información sobre la serie que no se puede extraer directamente. También se ha desarrollado un marco de optimización que, haciendo uso de técnicas de procesamiento de señal (como el Filtro Kalman) y, una técnica, que fusiona diferentes sistemas, se ha mejorado la estimación de exposición de las series.

Abstract

A financial engineering objective is to analyze financial time series. Using econometric models is necessary in order to carry out analysis and more accurate estimates and predictions. Due to the weaknesses of traditional econometric models, it is necessary to include a number of risk factors so multifactor models are developed. These factors are variables which change affects the value of assets in any way. Modeling these factors and dependencies can help estimate future losses.

The purpose, therefore, of this Master's Thesis is implementing a multifactor analysis system that, using subspace decomposition provides good quality information on the series that couldn't be extracted directly. We also developed an optimization framework, that making use of Signal Processing techniques (such as Kalman Filter) and, a technique, that fuse different systems, had improved the estimated exposition of the series.

Agradecimientos

El Trabajo Fin de Master sintetiza una gran parte de mi trabajo realizado durante el último año con el grupo de investigación ATVS – Grupo de Reconocimiento Biométrico en el Dept. de Tecnología Electrónica y de las Comunicaciones, Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid. El trabajo ha sido patrocinado parcialmente por la Beca de Colaboración del Ministerio de Educación y Ciencia durante el curso 2012-2013; y mayoritariamente por un contrato de colaboración del grupo ATVS.

Primero, me gustaría agradecer a mi tutor, el catedrático Joaquín González Rodríguez, por darme la oportunidad de trabajar en esta línea de investigación, por su guía y por su apoyo durante este periodo de tiempo. La confianza puesta en mí será eternamente agradecida.

Dentro del grupo ATVS también he recibido el apoyo de los profesores Javier Ortega, Doroteo Torre, Julián Fierrez, Daniel Ramos y Javier González.

Por supuesto, me gustaría agradecer a todos mis compañeros del ATVS por compartir conmigo tantos buenos momentos: Javier Franco, Jorge Cubero, Alfredo Serrano, Rubén Vera, Ruifang Wang, Derlin Morocho, Augusto Bourgeat, Raúl Haro, Pedro Tomé, Javier Galbally, Ester González, Marta Gómez, Alicia Lozano, Rubén Zazo, Ram Prasad y Sara Antequera. ¡Sois los mejores!

También quiero agradecer a mi familia y amigos durante todos estos años. Por supuesto, a los que me han hecho llegar hasta aquí: mis padres Manuel y Conchi (que se ha desvivido por mí), mi hermana pequeña Sara y mi querida novia Yvonne, quienes me han hecho ser quien soy.

Álvaro Diéguez Sánchez-Largo

Madrid, septiembre de 2013

Índice general

Índice de figuras	ix
1. Introducción	1
1.1. Motivación del proyecto	1
1.2. Objetivos y enfoque	1
1.3. Introducción a las técnicas de Factor Analysis (FA)	2
1.3.1. Motivación	2
1.3.2. Ventajas	3
2. Modelos econométricos clásicos	5
2.1. Introducción	5
2.1.1. Características observables de las series financieras	5
2.1.2. Estructura del documento	6
2.2. Modern Portfolio Theory	7
2.2.1. Capital Asset Pricing Model (CAPM)	7
2.2.2. Series temporales	9
2.2.3. Ejemplo de portfolio	9
2.2.4. Múltiples activos	13
2.2.5. Desventajas	13
2.3. Descomposición en subespacios	14
2.3.1. Aplicación de la teoría del Portfolio Moderna	14
3. Modelos multifactor	17
3.1. Portfolios	18
3.2. Modelos de factores	18
3.2.1. Selección de factores con métodos de análisis de subespacios	19
3.2.2. Ruido en los autovalores pequeños	20
3.2.3. Error de reconstrucción	21
3.3. Métodos de estimación	22
3.3.1. Mínimos cuadrados	22
3.3.2. Filtro Kalman	23

4. Experimentos	27
4.1. Entorno experimental	27
4.1.1. Bases de datos	27
4.1.2. Software usado	28
4.1.3. Visualización de resultados	28
4.1.4. Validación de resultados	29
4.2. Métodos de extracción de factores	30
4.3. Métodos de estimación	31
4.4. Ejemplos de estimaciones	31
4.4.1. Ejemplos de estimación	32
4.5. Fusión	34
4.5.1. Introducción sobre fusión de sistemas	34
4.5.2. Fusión en análisis multifactor	35
4.6. Detección de la inversión	37
4.6.1. Funcion/es de coste	37
4.6.2. Usando conocimiento a priori	39
4.6.3. Resultados preliminares	39
4.6.4. Optimización de parámetros	42
5. Conclusiones y trabajo futuro	45
5.1. Conclusiones	45
5.2. Trabajo futuro	46
Glosario de acrónimos	47
Bibliografía	49
A. Relación Minimización-Estimación	51
B. PCA	53
C. PCA sobre los factores	55

Índice de figuras

2.1. <i>Security Market Line.</i>	8
2.2. <i>Series temporales de Microsoft y Boeing.</i>	10
2.3. <i>Puntos de inversión en Microsoft ($X_a = 1$ $X_b = 0$) y Boeing ($X_a = 0$ $X_b = 1$).</i>	11
2.4. <i>Puntos de inversión en Microsoft y Boeing así como las distintas combinaciones.</i>	11
2.5. <i>Portfolio de mínima varianza.</i>	12
2.6. <i>Combinaciones dos a dos de los 2 activos con el otro activo libre de riesgo.</i>	12
2.7. <i>El portfolio tangencial se establece en $X_a = 0,4409$ $X_b = 0,5591$.</i>	13
2.8. <i>Inversión en portfolio tangencial.</i>	14
2.9. <i>Punto de inversión con mismo riesgo que Microsoft pero con un retorno mayor.</i>	14
2.10. <i>Ejemplo de aplicación de la Teoría del Portfolio Moderna [Extraído de [1]].</i>	15
3.1. <i>Información (mensual, semanal y diaria) retenida en función del número de autovalores seleccionados.</i>	19
3.2. <i>Histograma de autovalores publicado en [2].</i>	21
3.3. <i>(a) Riesgo predicho y el ocurrido finalmente en función del nivel de retorno esperado publicado en [2]. (b) Matriz de correlación filtrada.</i>	21
3.4. <i>Ejemplo de ventana deslizante para estimación paramétrica.</i>	23
4.1. <i>Ocho factores definidos en [3] en el periodo 2005-2013 con frecuencia mensual.</i>	28
4.2. <i>Reconstrucción de la serie a partir de la exposición a sus factores.</i>	29
4.3. <i>Inversión hecha por un inversor real en 16 factores.</i>	30
4.4. <i>Distribuciones del error medio cuadrático de los 2 experimentos representados mediante su diagrama de cajas.</i>	30
4.5. <i>Diagrama de cajas con estimación Kalman. Se calcula para autofactores (PCA) y los factores $F^{\mathcal{E}H}$.</i>	31
4.6. <i>Serie temporal de un fondo que se define como inversión en mercados emergentes.</i>	32
4.7. <i>Exposición a factores estimada de un fondo que se define como inversión en mercados emergentes.</i>	32
4.8. <i>Exposición a factores estimada de un fondo que se define como inversión en norteamérica.</i>	33
4.9. <i>Dos fondos de inversión con comportamiento similar a priori, pero cuya descomposición y dependencias son diferentes.</i>	34
4.10. <i>Serie temporal del fondo Eckhardt.</i>	35
4.11. <i>Exposición a los factores de riesgo estimado por mínimos cuadrados para el fondo Eckhardt [4].</i>	35

4.12. Mecanismo de fusión.	36
4.13. Mecanismo de fusión usado y exposición real.	37
4.14. Estimación de inversión para fondo equidistribuido.	39
4.15. Primera estimación de la inversión realizada para los 16 factores.	40
4.16. Estimación de la inversión realizada por el mecanismo de fusión para los 16 factores.	40
4.17. (a) Estimación de la inversión. (b) Inversión Real. (c) Estimación suavizada. . .	41
4.18. Resultado de la mejor estimación.	43
A.1. Ecuación 4.1 vs Error exposición final.	51
C.1. Diagrama de cajas de los errores cometidos para todos los experimentos en función del nivel de información retenido.	56

1

Introducción

1.1. Motivación del proyecto

El Trabajo Fin de Master se centra en el estudio y desarrollo de una metodología general motivada por el problema conocido como el análisis en subespacios de las series temporales y evaluación de exposición a factores. Para alcanzar este objetivo ha sido necesario profundizar en el análisis de otro de los ámbitos de mayor investigación en la actualidad dentro de las series temporales: análisis de conjuntos de series temporales de alta dimensionalidad.

La combinación de estas dos líneas de trabajo, estrechamente relacionadas, puede dar respuesta a diversos problemas prácticos: i) mejora del rendimiento a través de nuevos algoritmos de análisis y modelado de series temporales basados en la proyección de las series a un espacio ortogonal en el cual se pueda realizar un análisis particular de cada serie y posteriormente proyectar al espacio original; ii) disminución de la vulnerabilidad de las inversiones mediante la minimización del riesgo de las inversiones; iii) conseguir algoritmos que sean capaces de mostrar gráficamente información útil y que ayude en la toma de decisiones en el ámbito financiero.

Este Trabajo de Fin de Master (TFM) se centra en el tercero de los anteriores. Sin embargo, el sistema desarrollado plantea trabajos e investigaciones relativos a alguno de los dos primeros objetivos.

1.2. Objetivos y enfoque

El objetivo de este Trabajo Fin de Master de Álvaro Diéguez Sánchez-Largo ha sido seguir en la línea del trabajo desarrollado en la asignatura de Iniciación a la Investigación desarrollado en el primer cuatrimestre, consistente en una recopilación y síntesis de artículos del estado del arte en modelado de series temporales financieras. Este trabajo ha tratado de abordar las materias sintetizadas en ese documento, dentro del ámbito del análisis y modelado de series temporales financieras, y se han implementado algunos de esos sistemas.

Adicionalmente, el conocimiento adquirido durante el año de duración del Master (Máster Universitario en Investigación e Innovación en TIC) se ha aplicado a varias partes del proyecto:

alguna de las asignaturas cursadas (Machine Learning, Tratamiento de Audio y Voz para Biometría y Seguridad y Procesamiento de Información Temporal) tienen aplicación en el trabajo propuesto.

Con la hipótesis inicial de que la variabilidad total de los datos puede representarse en un subespacio de menor dimensión, hemos pretendido abordar los siguientes objetivos más concretos:

1. Hacer uso de subespacios como una poderosa herramienta para manejar variabilidad [5] (desde sus orígenes en algunos campos relacionados, tales como reconocimiento de cara o el reconocimiento de voz [6], y su inclusión en reconocimiento de locutor por medio de Factor Analysis).
2. Este marco de trabajo nos ha servido para poder analizar la composición de una cartera de inversiones. Esto se puede conseguir mediante un análisis en las ventanas de tiempo cercanas. Se ha generado tecnología usable sobre los temas tratados. Es decir, el análisis realizado no se queda sólo en un análisis teórico sino en implementaciones prácticas.
3. Finalmente, se han extraído las conclusiones del trabajo realizado y se proponen trabajos futuros.

1.3. Introducción a las técnicas de Factor Analysis (FA)

El uso del análisis de subespacios ha demostrado ser una poderosa herramienta para manejar la variabilidad desde sus orígenes en algunos campos relacionados, tales como el reconocimiento de cara o el reconocimiento de voz, hasta su inclusión en el reconocimiento de locutor por medio de Factor Analysis (FA)[6].

1.3.1. Motivación

El trabajo aquí desarrollado parte como una prolongación natural de las investigaciones realizadas por el doctor Javier González-Domínguez en reconocimiento de locutor y que se enmarcan dentro de la línea de investigación del grupo de investigación ATVS (grupo del tutor Joaquín González Rodríguez).

FA es un algoritmo usado en aprendizaje automático[5]. Los métodos de modelizado FA rompen con la forma establecida de concebir la variabilidad asociada a una señal de voz en reconocedor de locutor o de idiomas abrazando los siguientes dos principios:

- Teniendo en cuenta la variabilidad como una fuente continua en lugar de discreta.
- Modelando explícitamente la variabilidad inter-sesión e inter-locutor.

Aparte de estos dos pilares, otra idea fundamental, formulada inicialmente como una hipótesis, define las técnicas basadas en FA. Esta hipótesis puede formularse así:

Gran parte de la variabilidad se encuentra dentro de subespacios de una dimensionalidad mucho menor que el espacio original (es decir, el espacio del modelo). Por ejemplo, en reconocimiento de locutor, es posible encontrar subespacios de variabilidad inter-sesión y subespacios de locutor/idioma, que actúan como información a priori con el fin de modelar la información útil.

1.3.2. Ventajas

Presenta ventajas en aquellos entornos en los que los datos disponibles de entrenamiento no se parecen a las condiciones de test y los datos de entrenamiento/test son muy limitados. Este es un caso común en la ingeniería financiera, donde los datos disponibles son escasos y las condiciones de test no son las mismas. Con esta aproximación, queremos aprovechar el menor número de parámetros a estimar, por lo que disminuye notablemente la necesidad de muchos datos de entrenamiento.

Por ejemplo, en tareas de reconocimiento de locutor, FA trata de explotar los conocimientos a priori con el fin de modelar la variabilidad inter-sesión. La variabilidad inter-sesión es un problema en el reconocimiento de locutor, reduciendo de forma notable su rendimiento. Estas técnicas han supuesto una nueva forma de paliar de manera adecuada los efectos de dicha variabilidad.

2

Modelos econométricos clásicos

2.1. Introducción

El conocimiento y análisis automático de las series económicas existentes se está haciendo cada vez más importante. Es cada vez más relevante ser capaces de valorar posibles escenarios económicos en tiempo real. En consecuencia, es necesario el desarrollo de un nuevo área tecnológica y de investigación conocida como computación inteligente para ingeniería financiera. El origen de esta disciplina se establece en los años cincuenta. A pesar de que el estudio de los sistemas financieros ha sido sujeto de estudio durante muchos años, el aumento de la potencia computacional ha abierto un abanico de posibilidades de estudio muy importante. En los últimos 20 años, el campo de la ingeniería financiera se ha expandido a prácticamente todas las áreas de las finanzas y su demanda ha crecido dramáticamente.

Este nuevo enfoque permite aplicar las prestaciones computacionales de un ordenador, un sector en auge y que tiene grandes perspectivas de crecimiento y desarrollo. De esta manera podemos ofrecer por un lado, un análisis rápido y eficaz de las series temporales, y por otro, tomar decisiones guiadas por una función de coste. Las series temporales financieras están claramente influenciadas por el comportamiento humano, añadiendo un componente extra de pseudo-aleatoriedad que hace de este proyecto un reto apasionante y con grandes perspectivas de investigación a largo plazo.

2.1.1. Características observables de las series financieras

Los mercados¹ financieros son turbulentos. Tienen dependencias a corto y largo plazo que afectan a su comportamiento en el futuro a corto y largo plazo. Sin embargo, existen herramientas que permiten trabajar con los datos, analizarlos y, en cierto modo, usarlos en proyectos de inversión, debido a las similitudes de comportamiento entre los distintos mercados.

Otro hecho estilizado es que el tiempo es una dimensión fundamental. Grandes pérdidas y ganancias son hechas en breves períodos de tiempo. Eventos diversos (informes de inflación, anuncios gubernamentales, etc.) ayudan a esta concentración. Las características, por tanto,

¹El mercado representa el comportamiento general de todos los activos, es decir, la economía entera. Puede ser representado por el portfolio del mercado y a veces es medido por índices concretos como el IBEX 35 en España o el S&P 500 en EE.UU.

evolucionan con el tiempo, no pueden considerarse invariantes. Igualmente, existen tendencias de comportamiento. Muchas teorías financieras obvian que dichas tendencias generan en su desarrollo lo que comúnmente se llama burbujas.

Aunque predecir los precios ha sido hasta el momento una tarea infructuosa, sí que se están realizando investigaciones novedosas respecto a la evaluación de riesgos. No son predicciones deterministas, pero sí que es viable dar estimaciones. Podríamos enunciarlo así: *Puede que no se venza a los mercados, pero sí que podemos tratar de evitar sus mayores golpes* [7].

2.1.2. Estructura del documento

Se ha iniciado el documento tratando de resaltar los antecedentes y la motivación de esta investigación. En la sección 2.1 se ha presentado brevemente el campo financiero, con algunos problemas existentes todavía por resolver.

En la sección 2.2 se introducirá la teoría de portfolio moderna. En ella se trata de modelizar las inversiones y plantear un problema de optimización para las inversiones en activos².

La sección 3 ampliará el modelo visto en la sección 2.2 y presentará algunas aplicaciones prácticas de los modelos multifactor. En la subsección 3.2.1 se introducirán nuevas técnicas de selección de los factores mediante modelos de variables latente [8]³. Estas técnicas podrán ser usadas de forma alternativa al enfoque empírico que inicialmente tenían los modelos multifactor. Se presentarán de forma preliminar la función de coste. Adicionalmente, se desarrollan, de forma teórica, los métodos de estimación usados: mínimos cuadrados y Filtro Kalman.

En la sección 4 se presentarán los experimentos realizados por el autor respecto a modelos multifactor. Siguiendo la línea en [4], el objetivo será, usando tan sólo la información de la serie y la de los factores, tratar de estimar la exposición a factores de dicho fondo. Explicaremos inicialmente el entorno experimental de los trabajos realizados, para posteriormente dar algunos ejemplos de estimaciones hechas con el software realizado. Aquí se incluirá un estudio hecho sobre el modelo F&H[3] (modelo usado en el estado del arte) del fondo de inversión *Eckhardt Futures*. También se incluyen los experimentos que servirán tanto como comparativa entre distintos métodos de extracción de factores: PCA vs F&H; así como comparativa entre distintos métodos de estimación desarrollados: mínimos cuadrados vs Filtro Kalman. En la subsección 4.5 se presentará el sistema desarrollado por el autor para fusionar distintas estimaciones, que mejorará los resultados obtenidos por los mecanismos clásicos. Se desarrollarán los experimentos desarrollados al sistema implementado, que, de forma cuantitativa, han medido los rendimientos de los distintos algoritmos implementados y las configuraciones de parámetros óptimas.

El documento finalizará con las conclusiones extraídas y propuestas de trabajos futuros, e incluirá anexos que permitan ampliar el contenido expuesto durante el documento.

²Un activo financiero es un título por el que el comprador del título adquiere el derecho a recibir un ingreso futuro de parte del vendedor. El ejemplo más conocido podría ser una acción de una empresa, o bien un bono emitido por el Estado o una empresa cualquiera.

³A partir de las variables observadas se permite extraer cierto conocimiento subyacente o variables latentes, siendo variables que no se habían observado inicialmente.

2.2. Modern Portfolio Theory

La teoría del portfolio⁴ moderna trata de maximizar los retornos de las inversiones para un nivel de riesgo determinado. Esta teoría trata de formalizar el concepto de diversificación de la inversión. Mediante el estudio y análisis de las cantidades a invertir en cada activo, se pretende seleccionar los activos que aporten menor riesgo a la inversión global y de esta forma conseguir inversiones con menor riesgo que cualquier inversión individual.

Más formalmente, la teoría del portfolio moderna asume el retorno de los activos⁵ como normalmente distribuidos, y el riesgo como la desviación estándar de los retornos. La inversión en diferentes activos puede ser medida y cuantificada en este marco de trabajo. El desarrollo computacional producido en la segunda mitad del siglo XX, ha permitido la generalización y puesta en práctica de esta teoría financiera.

La sección introducirá el modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) de retorno de activos. Basándose en ese modelo, sentará las bases de la optimización de inversiones y ensalzará las ventajas de la diversificación de las inversiones. La sección finalizará con una serie de desventajas presentadas por este modelo y que, aunque usado en la industria financiera, motiven el desarrollo de nuevos modelos.

2.2.1. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Un modelo inicial para explicar y modelar los retornos de los activos es el modelo CAPM. Este modelo trata de explicar el retorno en función del retorno del mercado y de un retorno específico de cada activo.

El modelo fue introducido por William Sharpe (1964) sobre el trabajo anterior realizado por Harry Markowitz sobre diversificación y la teoría del portfolio moderna. Ambos obtuvieron posteriormente el premio Nobel de economía por esta contribución.

El objetivo final es la maximización del retorno de la inversión a la par que se controla el riesgo. Establecemos la hipótesis inicial de que el retorno de un activo (μ_i) depende del comportamiento del mercado:

$$\mu_i = \beta \cdot \mu_m \quad (2.1)$$

quedando su sensibilidad al mercado definida por dicho β y el retorno del mercado por μ_m .

Existen distintos escenarios en función del valor de beta:

- En caso de que β sea grande el comportamiento del activo estará más correlado al mercado.
- En caso de que sea pequeño el comportamiento del activo estará poco correlado al mercado.
- En caso de que sea negativo el comportamiento del activo estará negativamente correlado al mercado. Esto es, en caso de comportamiento negativo del mercado, el activo se comportará de forma positiva y viceversa.

⁴El Portfolio (o cartera de inversiones) es un conjunto de activos financieros. Bien pueden ser adquiridos por inversores individuales, o gestionados por un grupo profesional de inversión.

⁵El retorno de un activo es el porcentaje de crecimiento del activo en cada intervalo de tiempo.

Figura 2.1: *Security Market Line*.

El último caso será de gran importancia y utilidad ya que en caso de invertir en varios activos simultáneamente, nos permite tener una inversión menos dependiente del comportamiento general del mercado. Esto será lo que posteriormente llamaremos como diversificación de la inversión.

Sin embargo, existe una cota inferior a partir de la cual no tiene sentido la inversión: el llamado **activo libre de riesgo**, como podrían ser bonos del estado o fondo similar que el modelo entiende libre de riesgo ⁶. Es decir, inversiones con un retorno inferior a esta cota no tienen sentido, ya que, según este modelo, el activo libre de riesgo obtiene un retorno superior para el mismo nivel de riesgo.

De esta forma, puede extenderse la fórmula 2.1 como:

$$\mu_i = \mu_f + \beta \cdot (\mu_m - \mu_f) \quad (2.2)$$

siendo μ_f el retorno del activo libre de riesgo.

Se puede obtener ahora la curva *Security Market Line* (SML), en donde se representan los retornos de los activos en función de su exposición al mercado (Figura 2.1). La curva representa el retorno esperado de un activo en función de su exposición β al mercado. Es decir, a mayor exposición, mayor retorno esperado; si un activo se encuentra por debajo de esa curva, significa que ese activo tiene mucha exposición, pero poco retorno, lo cual hace que este activo sea una mala opción de compra (desde el punto de vista de la teoría del Portofolio Moderna); lo contrario sucedería si un activo se encontrara encima de dicha recta. En definitiva, la recta SML representa el nivel de retorno a esperar para cada nivel β de exposición al mercado.

Sin embargo, un comportamiento no queda definido exclusivamente por su sensibilidad al mercado sino que tiene un comportamiento intrínseco propio ϵ_i , quedando así la fórmula definitiva del modelo CAPM:

$$\mu_i = \mu_f + \beta \cdot (\mu_m - \mu_f) + \epsilon_i \quad (2.3)$$

De esta forma existen dos tipos de riesgo en un activo: el riesgo de mercado y el riesgo intrínseco de cada activo. El riesgo de mercado no es diversificable y por tanto no podremos obtener los beneficios de la inversión en múltiples activos. Mientras que el riesgo intrínseco sí que es diversificable mediante la inversión en múltiples activos (portfolios) que, en cierta manera, “contrarresten” el comportamiento intrínseco particular de cada uno de sus activos.

⁶El activo libre de riesgo se suele relacionar muy directamente con los bonos del estado. La asunción es que no existe ningún riesgo de impago (asunción no exenta de críticas).

2.2.2. Series temporales

Una serie temporal es una secuencia de valores tomados en momentos de tiempo con orden cronológico. Las acciones de bolsa son un ejemplo de serie temporal. Para cada t se toman valores, $y(t)$, como se puede ver en la figura 2.2. En ingeniería financiera no se trabaja normalmente con las series de precios sino con la serie diferencia de precios:

$$dif(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{y(t-1)} \quad (2.4)$$

ya que es más estacionaria respecto a la media y la varianza. La diferencia de precios representa los retornos obtenidos por dicha serie/activo.

La media (retorno medio) y varianza de ese activo son respectivamente:

$$\mu = \frac{\sum_t dif(t)}{T} \quad (2.5)$$

$$\sigma^2 = E[(dif(t) - \mu)^2] \quad (2.6)$$

2.2.3. Ejemplo de portfolio

Se considera el siguiente ejemplo de un portfolio de dos activos ⁷. En dicho ejemplo de inversión se debe invertir el 100% de nuestra inversión entre el activo A y el B. Formalizando quedaría:

- Porcentaje de inversión en A: X_a
- Porcentaje de inversión en B: X_b
- El portfolio w queda determinado por $[X_a X_b]$
- $X_a + X_b = 1$
- $\mu_p = X_a \cdot \mu_a + X_b \cdot \mu_b$
- $\sigma_p^2 = X_a^2 \cdot \sigma_a^2 + X_b^2 \cdot \sigma_b^2 + 2 \cdot X_a \cdot X_b \cdot \rho_{ab} \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b$ ⁸

Vemos como a menor correlación ρ_{ab} , la varianza de la inversión será menor. En consecuencia, trataremos de buscar activos cuya correlación sea la mínima posible. Se puede ver como de esta manera la correlación permite disminuir la varianza global, o lo que es lo mismo, como la diversificación permite mitigar los riesgos intrínsecos de cada activo.

El objetivo ahora es el de buscar predictabilidad (en este marco de trabajo de optimización media/varianza se traduce en disminuir la varianza o riesgo).

Siguiendo con el ejemplo, podemos obtener la media y la varianza de un activo a partir de su serie temporal (figura 2.2) y obtener los puntos de inversión de ambos (figura 2.3).

⁷El término portfolio es extendible a combinaciones de dos o más activos en una inversión.

⁸ $\sigma_p^2 = Var(p) = Var(X_a \cdot A + X_b \cdot B) = X_a^2 \cdot Var(A) + X_b^2 \cdot Var(B) + 2 \cdot X_a \cdot X_b \cdot Cov(A, B) = X_a^2 \cdot \sigma_a^2 + X_b^2 \cdot \sigma_b^2 + 2 \cdot X_a \cdot X_b \cdot \rho_{ab} \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b$

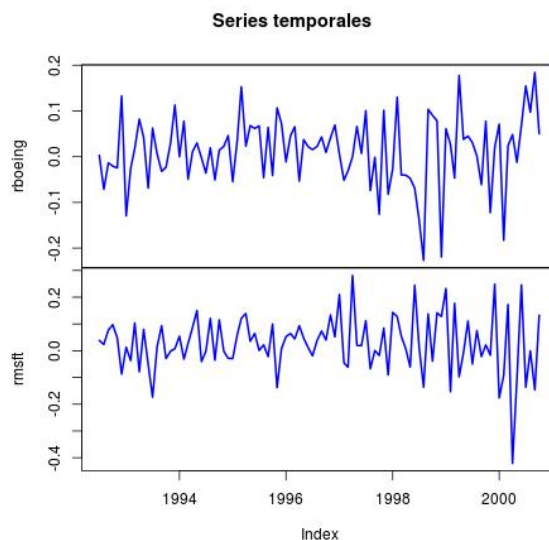


Figura 2.2: *Series temporales de Microsoft y Boeing.*

Es importante remarcar aquí, que en esta primera aproximación se realiza una asunción peligrosa y es que riesgo pasado explica o determina el riesgo futuro.

Diversificación

Una vez obtenida la matriz de medias y covarianzas de los activos, podemos obtener distintos puntos de inversión invirtiendo simultáneamente en ambos activos (Figura 2.4).

En este primer ejemplo, podemos observar como la diversificación permite mitigar los riesgos intrínsecos de cada activo.

Se puede demostrar que existe un único punto de inversión con riesgo mínimo, denominado mínimo global (Figura 2.5).

En la figura 2.5 también se puede ver como ciertos puntos de inversión no son realmente aceptables (puntos rojos), ya que existen otras inversiones posibles en las cuales, para el mismo nivel de riesgo, tienen un retorno superior ⁹.

Se puede demostrar que, para cada nivel de riesgo, existe un **único** punto de retorno óptimo, también llamado **portfolio óptimo**. La curva que contiene a todos los portfolios óptimos es la llamada **eficiente**.

Activo libre de riesgo

El siguiente caso a analizar es que uno de los dos activos sea un activo libre de riesgo. En ese caso, vemos como el activo libre de riesgo se encuentra en un punto de riesgo cero, como así se ha supuesto en el modelo. La combinación en un portfolio de un activo con otro activo libre de

⁹En este gráfico se pueden observar puntos por encima de Microsoft y Boeing. Estos puntos teóricos son inversiones negativas en uno de los activos y superiores al 100% en el otro. Aunque este modelo permita esta posibilidad inicialmente, será necesario un tratamiento posterior y asunciones extras posteriores que nos permitan trabajar realmente en estos puntos de trabajo.

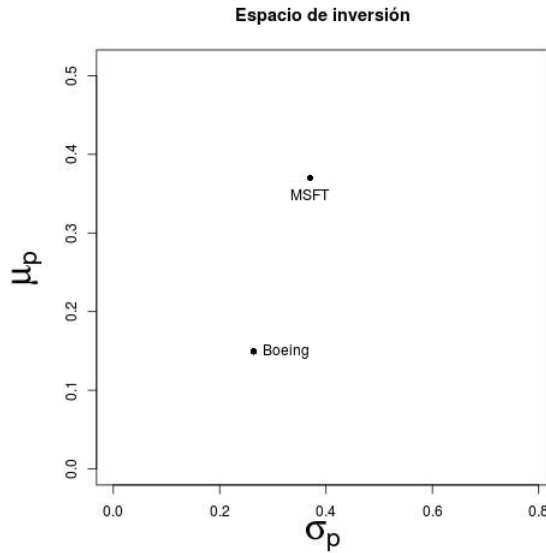


Figura 2.3: Puntos de inversión en Microsoft ($X_a = 1$ $X_b = 0$) y Boeing ($X_a = 0$ $X_b = 1$).

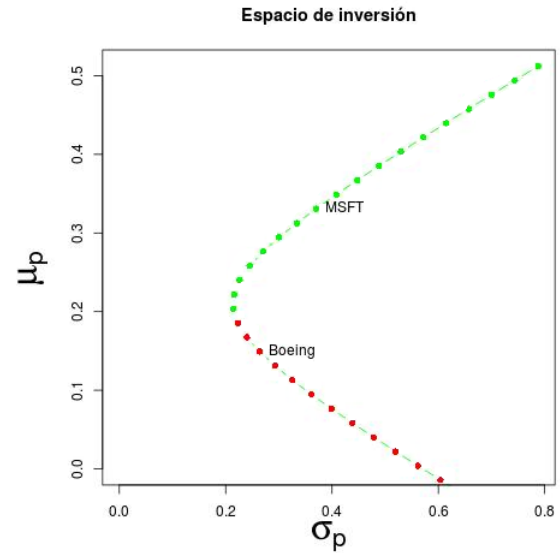


Figura 2.4: Puntos de inversión en Microsoft y Boeing así como las distintas combinaciones ($X_a = 0,9$ $X_b = 0,1$), ($X_a = 0,8$ $X_b = 0,2$), etc.

riesgo da como resultado una recta de portafolios (Figura 2.6), ya que la correlación entre ambos activos es cero (debido al activo libre de riesgo).

Sharpe Ratio

En este punto tenemos ya los mecanismos de trabajo básicos desde el punto de vista de la optimización media/varianza. Sin embargo, no tenemos una unidad para medir la bondad de la inversión. Uno de los mecanismos más usados en el estado del arte es el Sharpe Ratio. Desarrollando a partir de la fórmula de CAPM:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \mu_f + (\mu_m - \mu_f) \cdot \beta \\ &= \mu_f + (\mu_m - \mu_f) \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_i} \\ &= \mu_f + \frac{(\mu_m - \mu_f)}{\sigma_i} \cdot \sigma_p\end{aligned}\quad (2.7)$$

Siendo el Sharpe Ratio:

$$\frac{(\mu_m - \mu_f)}{\sigma_i} \quad (2.8)$$

que puede interpretarse como la cantidad de retorno obtenida por cada unidad de riesgo tomada.

Este medidor cuantifica la cantidad de retorno que aporta nuestra inversión por cada unidad de riesgo asumida. El objetivo es por tanto maximizar el Sharpe Ratio.

Inversiones en tres activos

Investiguemos ahora las posibles inversiones simultáneas en los dos activos incluyendo el activo libre de riesgo. Las posibles inversiones quedan ya esparcidas por el plano de inversión, pasando de un conjunto de posibilidades de dimensión uno a un conjunto de dimensión dos.

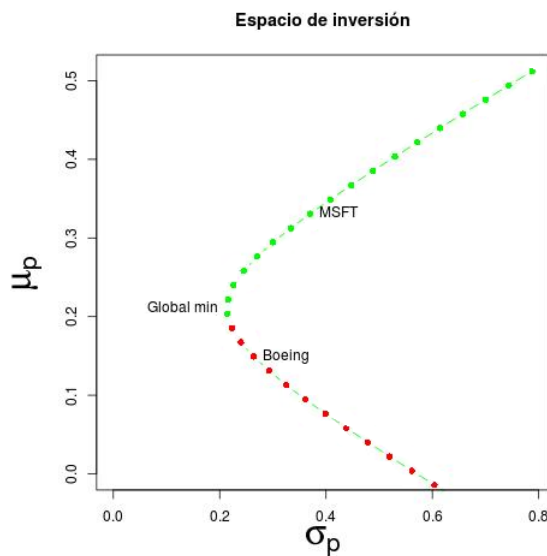


Figura 2.5: *Portafolio de mínima varianza.*

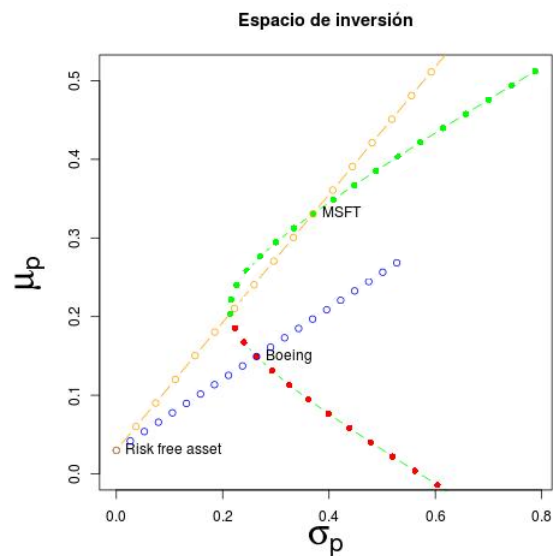


Figura 2.6: *Combinaciones dos a dos de los 2 activos con el otro activo libre de riesgo.*

Sin embargo, en este punto viene en nuestra ayuda el siguiente enunciado:

El teorema de **Mutual Fund Separation**[9] enuncia que la mejor combinación de activos y activos libres de riesgo se puede dividir en dos problemas.

1. El portafolio tangencial de los activos (con riesgo) con mayor Sharpe Ratio.
2. El activo libre de riesgo.

De esta forma optimizar la construcción de un portafolio, quedaría reducida a optimizar primero el portafolio de los activos con riesgo y, una vez definidas las proporciones de los activos con riesgo, incluir el activo libre de riesgo.

En la figura 2.7 se ve como, una vez se encuentra el portafolio tangencial, geométricamente se calcula la recta entre dicho punto de inversión y el del activo libre de riesgo.

Dentro de estas opciones, quedaría a disposición del inversor seleccionar el punto de inversión, en función del nivel de riesgo que quiera asumir. En la figura 2.8 se elije invertir un 90 % en el activo libre de riesgo y un 10 % en el portafolio tangencial.

Otro buen ejemplo de lo que conseguimos con este marco de trabajo es la figura 2.9. En él, se consigue establecer un punto de inversión con el mismo riesgo que Microsoft, pero con un retorno mucho mayor ¹⁰.

¹⁰Recordemos también que, previamente, habíamos visto como el punto de inversión en Boeing quedaba descartado tras las posibilidades de inversión diversificada.

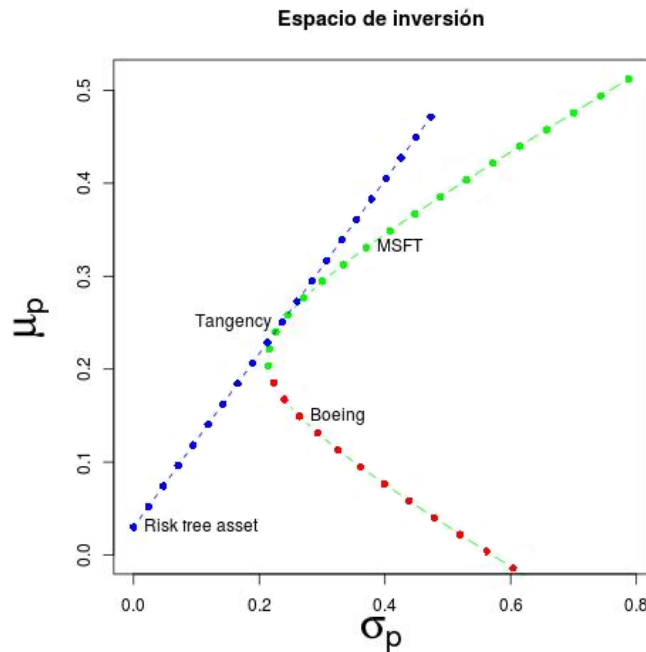


Figura 2.7: El portfolio tangencial se establece en $X_a = 0,4409$ $X_b = 0,5591$.

2.2.4. Múltiples activos

Pero hasta aquí sólo hemos visto la posibilidad de inversión en dos activos cualesquiera y un activo libre de riesgo. Es necesario extender el marco de trabajo para n activos. Para ello, utilizaremos las mismas técnicas. Necesitaremos las matrices de medias y covarianzas, y con ello extender lo ya desarrollado hasta este punto al álgebra matricial.

2.2.5. Desventajas

Sin embargo, el marco de optimización media-varianza de Markowitz es raramente usado en la práctica [1]. Las razones son varias:

- Realiza asunciones muy fuertes, como que los estadísticos quedan determinados a partir de valores pasados.
- Las aproximaciones basadas en distribuciones normales se han demostrado insuficientes.
- Hacer depender el comportamiento de un activo tan sólo del comportamiento del mercado, no es suficiente.
- El portfolio del mercado no es observable.
- La optimización media/varianza es una optimización quizás muy simple y restrictiva.

Una de las alternativas en las que se trabaja para solventar esta problemática son las técnicas de bootstrapping¹¹.

¹¹Las técnicas de bootstrapping sirven para calcular propiedades de estimadores (por ejemplo la media o la varianza). Si asumimos que los datos siguen una distribución independiente e idénticamente distribuida, el método puede implementarse construyendo nuevos datos, usando los datos ya previamente observados mediante una selección aleatoria de los datos con reemplazamiento.

También permite sacar medidas de precisión estadísticas sobre estimación de muestras. Con estas técnicas, se puede estimar distribuciones estadísticas de prácticamente cualquier tipo, usando métodos muy simples [10].

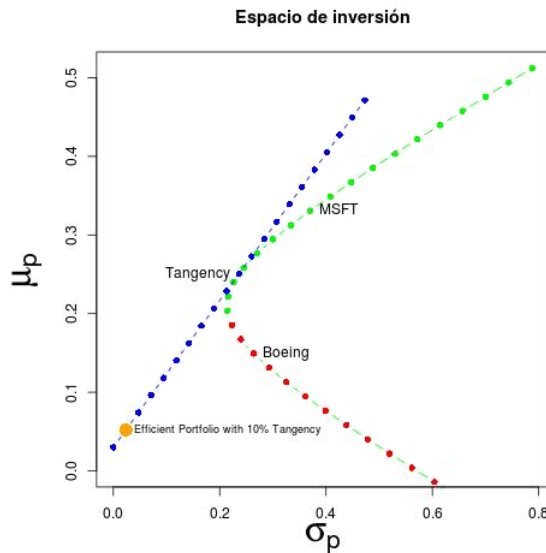


Figura 2.8: *Punto de inversión si se invierte un 90 % en activo libre de riesgo y un 10 % en portfolio tangencial (con lo que la inversión sería $X_a = 0,4409 \cdot 0,9 = 0,36$ $X_b = 0,5591 \cdot 0,9 = 0,54$).*

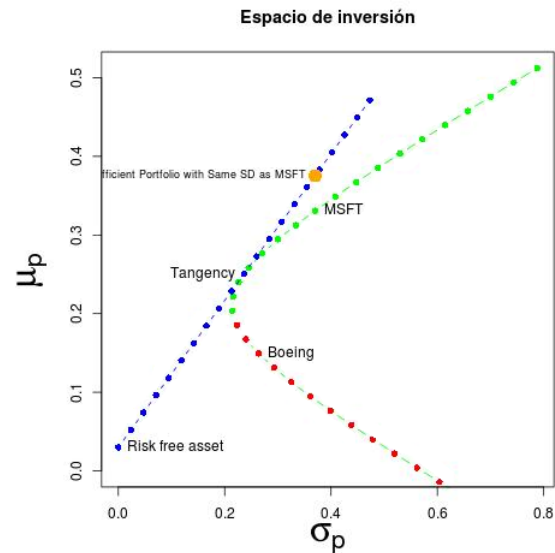


Figura 2.9: *Punto de inversión con mismo riesgo que Microsoft pero con un retorno mayor.*

2.3. Descomposición en subespacios

Los objetivos que ahora se plantean bajo este nuevo punto de trabajo serían:

1. Evaluación de activos
2. Evaluación de riesgos
3. Selección de factores
4. Procedimientos de estimación eficientes

Se presenta ahora una aplicación de la teoría del Portfolio Moderna, en la que se implementan y desarrollan dichos objetivos.

2.3.1. Aplicación de la teoría del Portfolio Moderna

Este marco teórico de trabajo no sólo sirve para una mejor aproximación teórica de la realidad sino que tiene su extensión a muchas aplicaciones prácticas. Procedo ahora a explicar una aplicación real del estado del arte [1] :

Se divide el espacio total de inversión en dos subespacios:

1. Portfolio neutral al mercado.
2. Exposición a los factores.

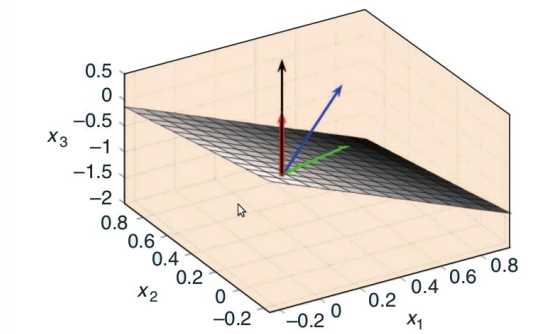


Figura 2.10: *Descomposición de un portfolio cualquiera que invierte en tres posibles acciones [Extraído de [1]]. El vector negro es el subespacio de exposición al factor. El plano es el subespacio neutral al mercado. El vector azul una posible inversión. El vector verde es la parte de la inversión correspondiente neutral al mercado. El vector rojo es la parte de la inversión correspondiente al factor.*

Supongamos el caso de tres dimensiones con un único factor, como en el caso del CAPM. En él, el espacio total de tres dimensiones se puede dividir en dos subespacios. Uno de dimensión uno, que es la exposición al factor y el otro de dimensión dos, que es el plano neutral al mercado (Figura 2.10).

El siguiente, es un resultado muy interesante y de gran utilidad[1]:

Cualquier portfolio óptimo (en un modelo multifactor) se puede **descomponer en dos port-folios óptimos**, el portfolio óptimo de exposición a los factores y el portfolio óptimo neutral al mercado.

El primero de ellos es más dependiente del clima y tendencias macroeconómicas. En él, se puede ajustar el nivel de exposición a cada uno de los factores. El segundo, por el contrario, tiende a revertir a la media. Esto es, los retornos altos tenderán a volver a su punto medio.

Imaginemos que, dado un momento de alta volatilidad, en el que se estén produciendo rendimientos bajos de nuestra inversión. Este marco de trabajo ayuda a buscar su causa mediante:

1. Un análisis en cada subespacio. Podemos analizar por separado cada subespacio.
2. Con respecto a la exposición a los factores, se puede decidir reajustar los parámetros.
3. Con respecto a la componente neutral al mercado, se puede analizar el rendimiento global de la inversión.

Según [1], cualquier análisis desarrollado en este marco de trabajo (optimización media/varianza con análisis de subespacios) **puede ser aplicado a cualquier portfolio**, independientemente de si estuvo construido con estas técnicas u otras distintas. Este resultado tiene bastante utilidad práctica, ya que permite extender los conocimientos a cualquier portfolio.

3

Modelos multifactor

Debido a los múltiples problemas del modelo CAPM ya explicados, se desarrollan los modelos multifactor ¹. Para ello es necesario la inclusión en la ecuación 2.3 de nuevos factores (o factores de riesgo). Estos factores son variables cuyo cambio puede afectar al valor de un activo de alguna manera. Modelar estos factores de riesgo puede ayudar a estimar pérdidas futuras, como por ejemplo ayudando a tomar decisiones de diseño.

A la hora de construir el portfolio, pueden ser muchos los posibles activos w_i a invertir, quedando definido un portfolio de forma unívoca por el vector w . De una manera más formal, debemos elegir la composición w de nuestro portfolio tal que, $\sum_{i=1}^N w_i = 1$. Normalmente, el número de activos a invertir N es muy alto, lo que hace que la dimensionalidad del problema sea muy grande. Los modelos multifactor presentados en esta sección presentan muchas ventajas:

- Representar la realidad mediante un número de factores más pequeño y, de esta forma, se reduce la dimensionalidad drásticamente.
- Facilidad para invertir la matriz de covarianzas (de mucha menor dimensión ahora), que es necesaria para el cálculo y optimización del portfolio.

Esta sección sentará las bases de los modelos multifactor y se desarrollará el marco de trabajo desarrollado para la estimación de dichos modelos. La línea seguida inicialmente, trata de reproducir los experimentos detallados en el artículo [4], que tomamos como una referencia del estado del arte.

Estos procedimientos tienen algunos puntos en común con el procesamiento de señales, área en la que el grupo del autor tiene demostrada experiencia. En este trabajo nos centraremos en los modelos multifactor lineales, tal y como se define en la siguiente fórmula:

$$r_t = \alpha_t + \sum_{i=1}^K \beta_{i,t} f_{i,t} + \epsilon_t \quad (3.1)$$

¹Muchas carteras de inversiones están compuestas de múltiples activos. El análisis de múltiples series temporales sufre del problema de la dimensionalidad (*curse of dimensionality*). Los modelos aplicados al análisis, modelado y predicción de series temporales individuales son difíciles de extender teóricamente y de aplicar en la práctica. Desde la primera simplificación del modelo CAPM, los modelos multifactor trabajan en un punto intermedio en el cual los retornos de las series temporales dependen dinámicamente de algunas variables económico-financieras.

siendo

- K el número de factores
- r_t el retorno del activo en tiempo t (dimensión $[Nx1]$).
- β la sensibilidad/exposición del activo a los factores $[NxK]$.
- f_t factores $[Kx1]$.
- α bias $[Nx1]$.
- ϵ el retorno intrínseco del activo $[Nx1]$.

En esta fórmula, se puede ver también reflejado la división entre el riesgo sistemático y el riesgo intrínseco, definido por β y ϵ respectivamente. La ecuación 3.1 permite identificar el origen del riesgo usando los signos de beta de cada factor.

De manera informal, una exposición positiva a un factor, hará que nuestro fondo suba cuando el factor suba, y baje cuando este baje. Por ejemplo, una exposición negativa al IBEX 35 hará nos que interese que la economía española empeore ya que nuestro portfolio subirá cuando baje el IBEX 35.

Otra aplicación de gran utilidad es el poder analizar cómo un evento influye en el comportamiento de un activo y, por ende, de los portfolios. Esto se puede conseguir mediante un análisis en las ventanas de tiempo cercanas al evento y midiendo en la ecuación 3.1 el valor de ϵ para cada activo en cada tiempo t . Sin embargo, esta tarea no ha podido ser abordada por cuestiones de tiempo, y se plantea como trabajo futuro.

3.1. Portfolios

Una vez definidos los modelos multifactor para representar los precios de los activos, podemos proceder a construir portfolios de inversión. Dado el abanico de activos a invertir, un portfolio queda definido por el vector w . En el cual queda definido la inversión a realizar en cada uno de los activos.

El retorno de la inversión a realizar queda entonces como:

$$r_{p,t} = w' \cdot r_t = w' \cdot \alpha + (w' \cdot \beta) \cdot f_t + w' \cdot \epsilon_t \quad (3.2)$$

3.2. Modelos de factores

Como ya se ha dicho, son modelos que relacionan los retornos a factores de riesgo. Los factores de riesgo pueden obtenerse de:

- **Datos fundamentales:** como pueden ser variables macroeconómicas, IPC, producción industrial, etc.
- **Factores estadísticos.** Esto es, obtenidos a partir de algoritmos de los datos. Su significado particular no está tan definido como los anteriores pero se espera un mejor rendimiento. Entre ellos los estudiados serán Principal Component Análisis (PCA) y Factor Analysis (FA), que son técnicas de análisis de subespacios.

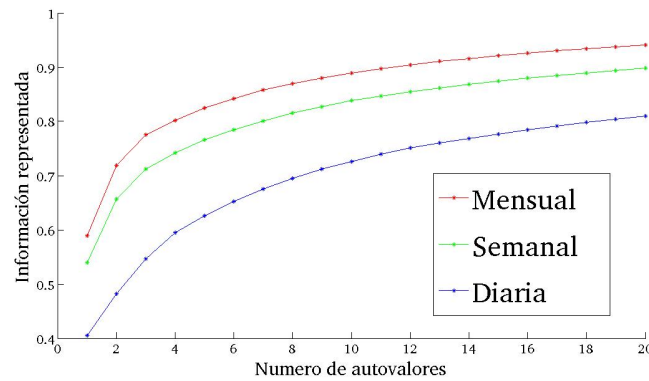


Figura 3.1: Información (mensual, semanal y diaria) retenida en función del número de autovalores seleccionados para 174 series temporales financieras. Se representa la información que retiene nuestro modelo (información medida por la varianza de los datos) en función del número de autovalores escogidos.

- **Portfolios específicos:** es bastante común incluir factores de portfolios específicos, típicamente IBEX 35 en España o el S&P 500 en EE.UU.

3.2.1. Selección de factores con métodos de análisis de subespacios

La selección de los factores de forma empírica ha sido el enfoque clásico usado en la literatura hasta ahora. Se escogen factores provenientes de variables macroeconómicas o portfolios concretos. Sin embargo, existe una serie de publicaciones [1][4][11] que tratan de seleccionar los factores mediante métodos de subespacios ². Estas publicaciones se basan en dos hipótesis iniciales:

1. La variabilidad total de los datos puede representarse en un subespacio de dimensión menor.
2. El espacio queda representado con un número de variables menor y supone pérdidas de la información que disponemos. Estas técnicas se usan en las ciencias computacionales para poder solucionar problemas de una forma computacionalmente viable. Mediante la reducción de la dimensionalidad, se consigue, perdiendo información, tratar con problemas que no eran viables previamente.

Adicionalmente, en el ámbito de la ingeniería financiera, existen muchos patrones anómalos, es decir, al calcular correlaciones entre activos, existen patrones espurios que se extraen pero son debidos a coincidencias que no volverán a suceder en el futuro. Por tanto, en el ámbito de la ingeniería financiera, descartar las variables de menor importancia no sólo permitirá reducir la dimensionalidad (con las ventajas que ello supone) sino además, mejorar la robustez (al deshacerse de una serie de correlaciones detectadas que son debidas al azar, o a un comportamiento aislado que no se volverá a repetir en el futuro). Conseguimos de esta manera una mejor explicación de la realidad.

El algoritmo usado es el algoritmo Principal Component Analysis o PCA (véase anexo B). Para analizar los patrones de comportamiento, calculamos la matriz de correlación. Una vez tenemos esta matriz (cuadrada y simétrica), realizamos una descomposición en autovalores. De aquí se

²Problemas multidimensionales (como el análisis de múltiples series temporales) generalmente exhiben una serie de patrones de comportamiento comunes, indicando una estructura subyacente en los datos. Los métodos de selección estadística de la dimensionalidad (y particularmente PCA) son métodos que se basan en dicho principio. El objetivo es identificar, a partir de los datos observados, los factores que tienen en cuenta la mayor parte de la variabilidad en la matriz de covarianzas de los datos.

pueden extraer los autovalores grandes, que contienen la información más representativa y que queremos retener. Y permite también descartar los autovalores pequeños, ya que no aportan al modelo. En la figura 3.1 se puede ver la descomposición en autovalores realizada sobre una base de datos de series temporales financieras. Se representa la información que retiene nuestro modelo (información medida por la varianza de los datos) en función del número de autovalores escogidos:

$$I = \frac{\sum_k^m \lambda_k}{\sum_i \lambda_i} \quad (3.3)$$

siendo i la dimensión del modelo.

El autovector mayor conseguiría retener la mitad de la información aproximadamente. También se puede observar cómo a partir de 6 autovalores, la gráfica tiende a estabilizarse, o lo que es lo mismo, los autovalores restantes contienen muy poca información real ³(además de poder ser información ruidosa). Adicionalmente, en la gráfica se muestra la información retenida en función del periodo muestral. Cuanto más grande sea el periodo, más correlacionados están los datos.

3.2.2. Ruido en los autovalores pequeños

Las siguientes afirmaciones son importantes, ya que justifican en cierto modo la utilidad de la reducción de dimensionalidad:

1. Los autovalores más grandes retienen la información real.
2. Los autovalores más grandes consiguen retener un porcentaje realmente alto de la información real.
3. Los autovalores pequeños (información “perdida”) modelan patrones ruidosos o de poca utilidad.

Los motivos que nos llevan a hacer dichas afirmaciones están extraídos de [2]: en él, se comparan las matrices de correlación de unas series temporales financieras (S&P 500) con las de una matriz aleatoria⁴. Posteriormente se descomponen en autovalores y se muestra el histograma de los mismos (Figura 3.2).

En la figura 3.2 se puede apreciar como la parte del histograma de los autovalores pequeños de S&P 500 ($\lambda < 0,6$) se ajustan a la matriz aleatoria. Sin embargo la parte del histograma de autovalores mayores no lo hace; por ejemplo, el autovalor mayor es 322 más grande que el autovalor mayor de la matriz aleatoria. De aquí podríamos extraer una conclusión (no demostrada) de que el 30 % de la energía de las series es **ruido**.

Analizando los resultados de este ejemplo, podemos ver que la matriz de correlación, contiene una cantidad significativa de ruido. Mediante el algoritmo PCA se consigue descartar ese ruido mejorando la estimación del riesgo (como se verá en el ejemplo siguiente).

³Identificar el número K de factores es una de las tareas más importantes. La opción más común es usar los criterios de selección de modelos AIC (Akaike Information Criteria) o BIC (Bayesian Information Criteria). Ambos basan su umbral de decisión en la función de verosimilitud, pero con ponderaciones diferentes.

⁴La matriz denominada aleatoria es realmente una matriz cuyos elementos están incorrelados con una distribución normal.

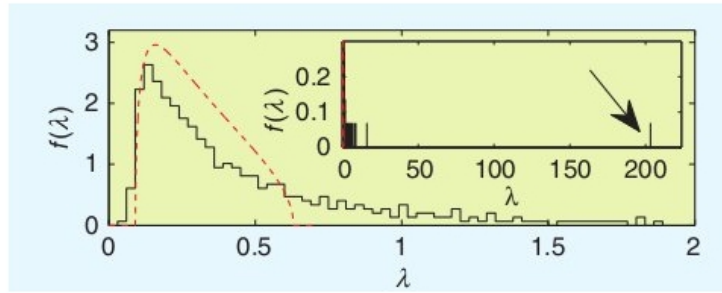


Figura 3.2: Histograma de autovalores de la función de correlación de las series financieras con la densidad de probabilidad esperada en el caso de una matriz aleatoria publicado en [2]. El número de activos usados es 494 y el número de muestras por activo 2444. El 95 % de los autovalores son menores que 2, que es la parte aumentada, siendo el histograma completo el de la esquina superior derecha. El mayor autovalor, marcado con la flecha, es 203,24. Se puede observar como la mayoría de la información corresponde a ruido. [Extraído de [2]]

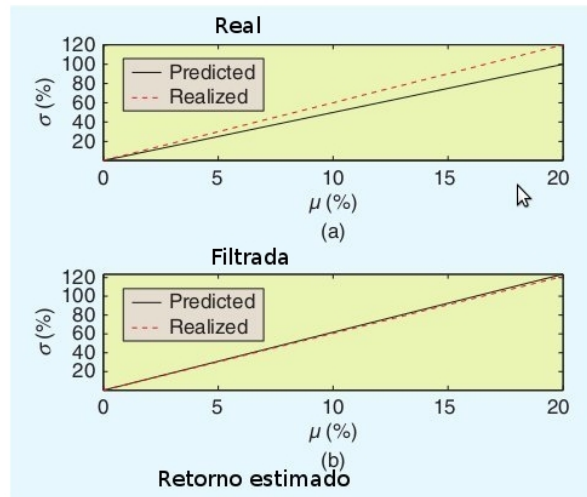


Figura 3.3: (a) Riesgo predicho y el ocurrido finalmente en función del nivel de retorno esperado. En este caso se ha usado la matriz de correlación completa. (b) Matriz de correlación filtrada. El número de autovalores se fija en 4, que retiene el 52 % de la varianza. El error se reduce claramente usando PCA. [Extraído de [2]]

El contenido teórico subyacente a este algoritmo es el análisis de subespacios. Siguiendo ahora con estos mismos datos, se procede a calcular el riesgo del portfolio óptimo. En la figura 3.3 podemos ver cómo la estimación hecha con la matriz de correlación completa tiene un error relativo del 18 %, mientras que usando PCA y eligiendo los 4 primeros autovalores, el error se ve reducido al 2 %.

3.2.3. Error de reconstrucción

Una vez estimados los parámetros $\hat{\beta}$, el retorno estimado queda definido como

$$\hat{r}_t = (w' \cdot \hat{\beta}) \cdot f_t \quad (3.4)$$

El error de la estimación lo estimaremos inicialmente como el error de reconstrucción entre los retornos reales r_t de la serie y los retornos estimados \hat{r}_t .

De esta forma podríamos intentar recomponer el fondo original a partir de los retornos estimados \hat{r}_t . Se puede dibujar y observar visualmente el resultado. Es decir, verificando la ecuación 3.5

$$r_t \simeq \hat{r}_t \quad (3.5)$$

recompondremos el fondo original a partir de las estimaciones realizadas.

El error definido inicialmente para el experimento realizado en las siguientes secciones es, por tanto, el error cuadrático medio:

$$Error = \sqrt{\sum_{t=h}^{numdias} (\hat{r}_t - r_t)^2} \quad (3.6)$$

3.3. Métodos de estimación

Esta sección detallará los procedimientos usados para el desarrollo del sistema de análisis multifactor. Primero describirá los sistemas de estimación usados (mínimos cuadrados y el Filtro Kalman), para posteriormente presentar la contribución realizada en este trabajo con el sistema de fusión. Finalmente, se expone el mecanismo usado para evaluar estos algoritmos.

La estimación $\hat{\beta}$ del parámetro desconocido β es otro paso muy importante en la creación del sistema de análisis multifactor. Siguiendo los procedimientos desarrollados en [4], los métodos de estimación usados son:

1. Mínimos cuadrados.
2. Filtro Kalman

3.3.1. Mínimos cuadrados

Mínimos cuadrados es una aproximación natural para estimar β en la ecuación de minimización 3.1 del problema multifactor. A partir de la igualdad

$$\sum_{i=1}^K \beta_{i,t} f_{i,t} - r_t$$

la ecuación resultante a minimizar en cada punto t es la siguiente:

$$\hat{\beta}_t = \min_{\beta} (\sum_{i=1}^K \beta_{i,t} f_{i,t} - r_t)$$

donde K es el número de factores.

La principal desventaja es que mínimos cuadrados estima la media, pero no captura el dinamismo del sistema temporal, es decir, no es capaz de capturar que existen cambios de exposición a lo largo del tiempo. Es necesario hacer una modificación a los mínimos cuadrados mediante un procedimiento de ventanas deslizantes (ecuación 3.7) que sólo haga uso de días contiguos. Este es el procedimiento que se ha usado durante todo el proyecto y al que se hace referencia cuando se habla de mínimos cuadrados.

$$\hat{\beta}_t = \min_{\beta} (\sum_{t'=t-h}^t (\sum_{i=1}^K \beta_{i,t'} f_{i,t'} - r_{t'})) \quad (3.7)$$

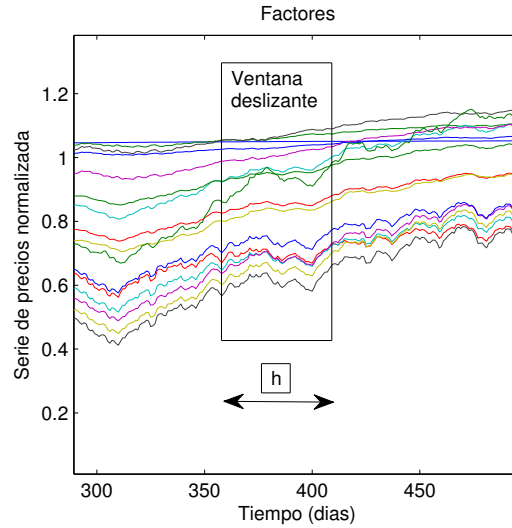


Figura 3.4: Ejemplo de ventana deslizante para estimación paramétrica.

En la figura 3.4 se puede ver un ejemplo de ventana deslizante para realizar la estimación. Sin embargo, aunque dinámico, este procedimiento sigue usando información retrasada para estimar β .

3.3.2. Filtro Kalman

El Filtro Kalman (FK) [12] es un estimador paramétrico usado en entornos dinámicos y ruidosos. Se trata de un estimador lineal secuencial⁵ del estado del arte en el ámbito del procesamiento de señal. El Filtro Kalman se engloba dentro del área de métodos bayesianos, es decir, usando el conocimiento a priori de las propiedades estadísticas del modelo. En el caso del FK, se necesita la matriz de medias y covarianzas del estado inicial y de las ecuaciones recursivas del proceso, que permiten propagar dichas propiedades a lo largo del tiempo. Esta estructura recursiva permite ser computacionalmente viable, ya que tiene en cuenta todas las medidas tomadas hasta ese punto, sin necesidad de incluirlas en la ecuación en cada instante.

Se requieren los siguientes parámetros:

1. β_t es el estado en que se encuentra el proceso.
2. Φ es la matriz de transición de estados que tiene el problema: $\beta_t \simeq \Phi \beta_{t-1}$.
3. H_t es la matriz que mejor aproxima $y_t \simeq H_t \beta_t$

⁵En cada instante, el FK es el estimador lineal óptimo con menor error cuadrático medio.

Planteándose, de esta forma, las dos siguientes ecuaciones recursivas para cada paso; primero la de estados

$$\beta_{t/t-1} = \Phi \beta_{t-1/t-1} \quad (3.8)$$

y segundo, la que hace uso de la nueva medida y_t

$$\beta_{t/t} = \beta_{t/t-1} + K_t(y_t + H_t \beta_{t/t-1}) \quad (3.9)$$

en donde K_t es la ganancia del filtro Kalman.

En este documento daremos una interpretación intuitiva; sin embargo, para una prueba rigurosa de la misma, animamos al lector a leer las citas relacionadas [12] y [13].

En la ecuación 3.8 se actualiza el estado $\beta_{t/t-1}$ a partir del estado anterior $\beta_{t-1/t-1}$ y de la matriz de transición entre estados Φ que tiene el problema. Se podría interpretar como la estimación lineal óptima que se puede hacer en ausencia de nueva información (la medida y_t), suponiendo $\beta_{t-1/t-1}$ como óptimo, y usando un mecanismo de inducción.

En la ecuación 3.9 se actualiza el estado a partir de la información que se tiene de la medida y_t . En dicha ecuación, se plantea añadir de forma aditiva la información proporcionada por la medida. El grado de adaptación que sufre la variable de estado β viene determinada por la ganancia del FK⁶⁷. En el caso de que la nueva medida no aporte información (si es exactamente la predicción realizada por la ecuación 3.8), no se modificará el estado.

Filtro Kalman en Análisis Multifactor

Como ya se ha dicho, el FK es un modelo de estado-espacio que asume que la variable que estamos estimando no es directamente observable, sino que evoluciona en función de una ecuación de estados. La ecuación que se puede plantear en el problema de análisis multifactor es la siguiente:

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega_t \quad (3.10)$$

$$r_t = g_t' \beta_{t-1} + \epsilon_t \quad (3.11)$$

en donde

- Asumimos Φ como la matriz Id .
- Las medidas y_t en este caso son los factores g_t y el retorno del fondo r_t .
- El error de actualización de estado ω_t está distribuido como una normal $N(0_{K+1}, \Omega)$ siendo Ω una matriz diagonal. Es decir, el error cometido en la ecuación de estado factoriza sobre los factores.
- El error de las medidas ϵ_t está distribuido como una normal $N(0, \sigma_{\epsilon_t}^2)$.

⁶La ganancia determinada por la ganancia K_t se deriva de las condiciones de optimalidad del FK y de los momentos de orden dos, que, aunque no aparecen en esta sección, son necesarias para determinar la ganancia.

⁷Las tres condiciones de optimalidad son: linealidad del proceso en la ecuación de medida y de estado $y = H\beta + b$; media cero del error $\mathbb{E}(\epsilon) = 0$ y ortogonalidad del error con respecto a la medida $\mathbb{E}(\epsilon y_t) = 0$

El filtro Kalman por tanto realiza de forma alternativa las siguientes dos ecuaciones de actualización de estado:

$$\beta_{t/t-1} = \beta_{t-1/t-1} \quad (3.12)$$

$$\beta_{t/t} = \beta_{t/t-1} + Z_t e_t \quad (3.13)$$

en donde:

- $e_t = r_t - g_t' \beta_{t/t-1}$ es la estimación del error realizado. Lo que en la sección 3.2.3 hemos llamado error de reconstrucción o diferencia entre el retorno de la serie y el retorno esperado (debido a la exposición a sus factores).
- $Z_t = S_t g_t (g_t' S_t g_t + \sigma_{\epsilon_t}^2)^{-1}$ es la ganancia del FK.
- $S_t = \mathbb{E}((\beta_t - \beta_{t/t-1})(\beta_t - \beta_{t/t-1})')$ la covarianza del error asociado con la predicción del siguiente estado. Como decisión de diseño hemos establecido β_t como el estado estimado por la ecuación de mínimos cuadrados (definido en la sección 3.3.1).

4

Experimentos

En esta sección se presentarán los experimentos realizados por el autor respecto a modelos multifactor. Siguiendo la línea en [4], el objetivo es, usando tan sólo la información de la serie y la de los factores, tratar de estimar la exposición a factores de dicho fondo.

Explicaremos inicialmente el entorno experimental de los trabajos realizados, para posteriormente dar algunos ejemplos de estimaciones hechas con el software realizado. Aquí se incluirá un estudio hecho sobre el modelo F&H[3] (modelo usado en el estado del arte) del fondo de inversión *Eckhardt Futures*. Adicionalmente, se incluye los experimentos que servirán tanto como comparativa entre distintos métodos de extracción de factores: PCA vs F&H; así como comparativa entre distintos métodos de estimación desarrollados: mínimos cuadrados vs Filtro Kalman.

En esta sección se presentan también los desarrollos propios realizados. Entre ellos, se encuentra el sistema desarrollado por el autor para fusionar distintas estimaciones, que mejorará los resultados obtenidos por los mecanismos clásicos.

En el mismo entorno experimental se desarrollarán los experimentos desarrollados al sistema implementado, que, de forma cuantitativa, han medido los rendimientos de los distintos algoritmos implementados y las configuraciones de parámetros óptimas.

4.1. Entorno experimental

A continuación se desarrollará el entorno de trabajo en los que se desarrollaron los experimentos realizados en este TFM: software desarrollado y datos usados por dicho software.

4.1.1. Bases de datos

Hemos usado una serie de bases de datos públicas y privadas. Los factores macroeconómicos F&H usados en este TFM y definidos en el artículo [3], se obtienen en la páginas web de su autor con una frecuencia mensual (contiene 8 factores con índices de bonos, tendencias y portfolios que están representados en la figura 4.1). En él, se indican los pasos para obtener los distintos factores:

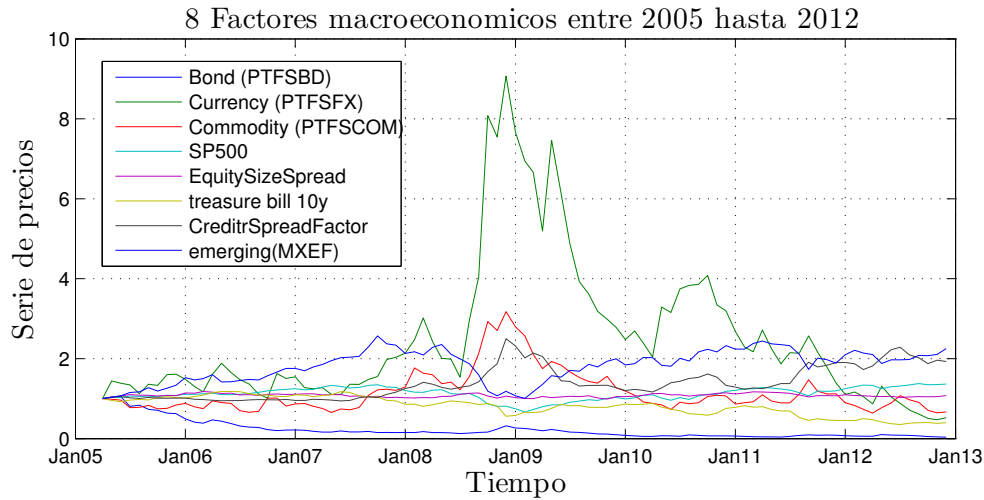


Figura 4.1: Ocho factores definidos en [3] en el periodo 2005-2013 con frecuencia mensual.

- Los tres factores tendenciales son generados por el autor y están disponibles en dicha web.
- Tanto el índice *S&P500* como el índice *Russell 2000* están disponibles publicamente.
- Los factores relaciones con bonos están disponibles en la página de la reserva federal de Estados Unidos en la página web: http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data/Business_day/H15_TCMNOM_Y10.txt. Los factores de dispersión se encuentran en www.federalreserve.gov/releases/h15/data/Business_day/H15_BAA_NA.txt y www.federalreserve.gov/releases/h15/data/Business_day/H15_TCMNOM_Y10.txt.
- Como último factor, correspondiente a los mercados emergentes, se usa el índice público: *MSCI Emerging Market index monthly total return*.

4.1.2. Software usado

El trabajo se ha llevado a cabo en entorno Matlab por distintos motivos:

- Por su facilidad de uso.
- Por la existencia de paquetes adicionales de desarrollo.
- Por la capacidad y rapidez de generación de gráficas.

Para desarrollar el paquete software de este Trabajo Fin de Master se ha hecho uso del paquete Matlab *Optimization Toolbox*. Aunque se han implementado distintas funciones adicionales, una parte del trabajo fue familiarizarse con este entorno de trabajo, que hace uso de optimización lineal y no lineal.

4.1.3. Visualización de resultados

Los resultados obtenidos se presentarán de dos formas diferentes:

1. *Forma gráfica*. Se presentarán en dos formatos: en visualización “estándar”, esto es, dibujando en cada t los factores desde 0 hasta su exposición estimada (ejemplo figura 4.17) o, en visualización “apilada”, dibujando por encima de la exposición del factor anterior (ejemplo figura 4.6).
2. *Forma analítica*. Se presentarán los resultados en forma numérica según la ecuación 3.7.

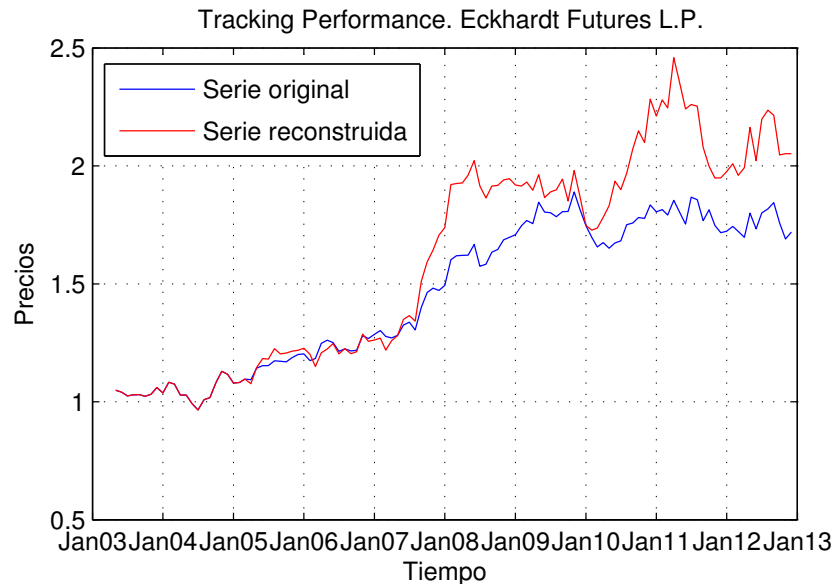


Figura 4.2: *Reconstrucción de la serie a partir de la exposición a sus factores.*

4.1.4. Validación de resultados

Error de reconstrucción

En la figura 4.2 se puede ver la diferencia en la reconstrucción de la serie a partir de las exposiciones estimadas a partir de mínimos cuadrados y el modelo F&H. Los 24 primeros meses no pueden ser estimados ya que se necesita información sobre los 24 meses anteriores para la estimación de cada dato.

Es importante destacar que la función de error basada en error de reconstrucción no penaliza el sobreaprendizaje de los datos. Es decir, esta función de coste no penaliza añadir nuevos factores al modelo, y por tanto, añadiendo factores, se consigue reducir siempre (o como poco mantener) el error de reconstrucción. Este aspecto motivó una línea de trabajo en sí misma, que fue generar una función de coste adecuada a este problema de estimación de exposición a factores (desarrollado en la sección 4.6).

Error de inversión

Las pruebas iniciales se desarrollaron con el error de reconstrucción. Sin embargo, el error de reconstrucción no consigue modelar la exactitud de la estimación (se detallará en la sección 4.6). Con ese motivo, se plantea la función de error de inversión. Esto quiere decir, que imponemos la siguiente condición:

$$\sum_{i=1}^K \beta_{i,t} = 1 \quad \forall t$$

La figura 4.3 muestra un ejemplo de inversión real (cada color representando el porcentaje invertido en cada factor y sumando todos ellos el 100 % de la inversión). A diferencia de la inversión, la exposición, no significa tener la inversión directamente en ese factor, puede que esa exposición sea indirecta, pudiendo incluso no haber invertido en absoluto en dicho factor para estar expuesto. Vemos cómo una inversión real se comporta de una forma variable a lo largo del tiempo, aunque no de forma completamente aleatoria, es decir, estados contiguos tienen una composición parecida.

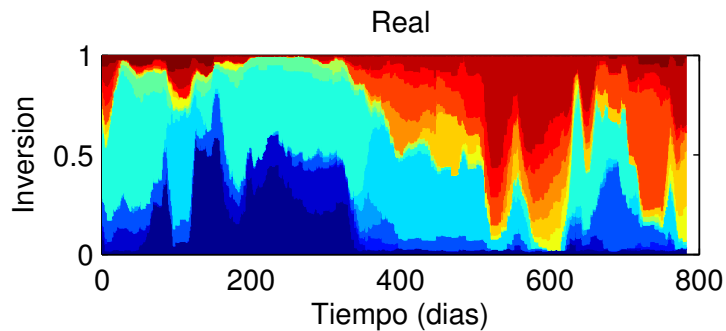


Figura 4.3: *Inversión hecha por un inversor real en 16 factores.*

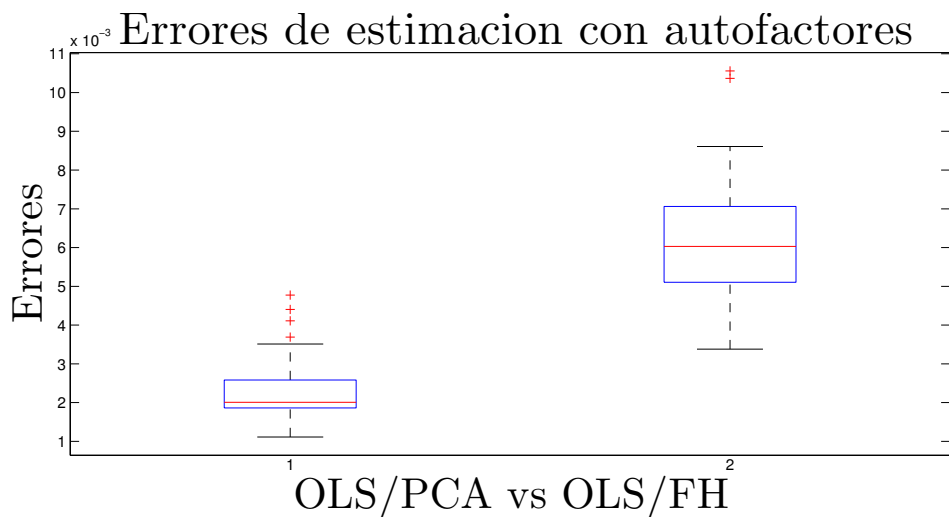


Figura 4.4: *Distribuciones del error medio cuadrático de los 2 experimentos representados mediante su diagrama de cajas.*

4.2. Métodos de extracción de factores

Queremos comparar entre distintos métodos de extracción de factores: PCA y F&H. El método de selección de variables F&H[3] contiene 8 factores con índices de bonos, tendencias y portafolios. PCA como ejemplo de método de análisis de subespacios. En este experimento, retenemos los cuatro autovalores principales. Para ello, se ha realizado de igual forma a las secciones anteriores, una estimación de 72 fondos de inversión, usando una estimación de mínimos cuadrados.

En la figura 4.4 se puede ver como el algoritmo PCA funciona mejor que el modelo F&H, siendo el error de la ecuación 3.6 menor. Cabe resaltar además que se han retenido sólo los cuatro autovalores principales y que por tanto, el algoritmo PCA (como representante de los algoritmos de selección de factores con métodos estadísticos) obtiene un resultado más competitivo que la preselección de factores macroeconómicos.

Retener más autovalores al desarrollar PCA, no haría más que aumentar aún más la distancia que existe entre ambos métodos, dando evidencia estadística de la superioridad de los métodos estadísticos frente a los de variables macroeconómicas.

4.3. Métodos de estimación

Queremos comparar entre también distintos métodos de estimación de exposición: mínimos cuadrados vs Filtro Kalman. Mínimos cuadrados supone una aproximación simple y directa, en la cual se trata de reducir el error cuadrático medio. El FK establece un modelo de estado-espacio en el que la información de días anteriores se usa sólo de forma implícita. Para realizar este experimento, se ha realizado una estimación de 72 fondos de inversión de igual forma que la prueba anterior.

El experimento llevado a cabo, es el mismo que el realizado en la sección 4.2 en donde el método de estimación es ahora FK, en lugar de mínimos cuadrados. Comparando el diagrama de la figura 4.5 con la figura 4.4 se puede ver cómo el orden de magnitud pasa de ser 10^{-3} a 10^{-17} . Este hecho es una mejora sustancial que motiva el añadir el FK a las herramientas de análisis multifactor ya desarrolladas. El FK calcula de forma recursiva la distribución condicional de los datos. Este mecanismo evita el procedimiento de estimación con ventanas deslizantes. El procedimiento de ventanas deslizantes usa datos de días atrasados, que puede hayan variado desde entonces. Por tanto, el FK, usando sólo los datos del propio día puede conseguir reducir el error. Adicionalmente se puede ver como PCA mejora también los resultados obtenidos por el modelo de factores macroeconómicos F&H.

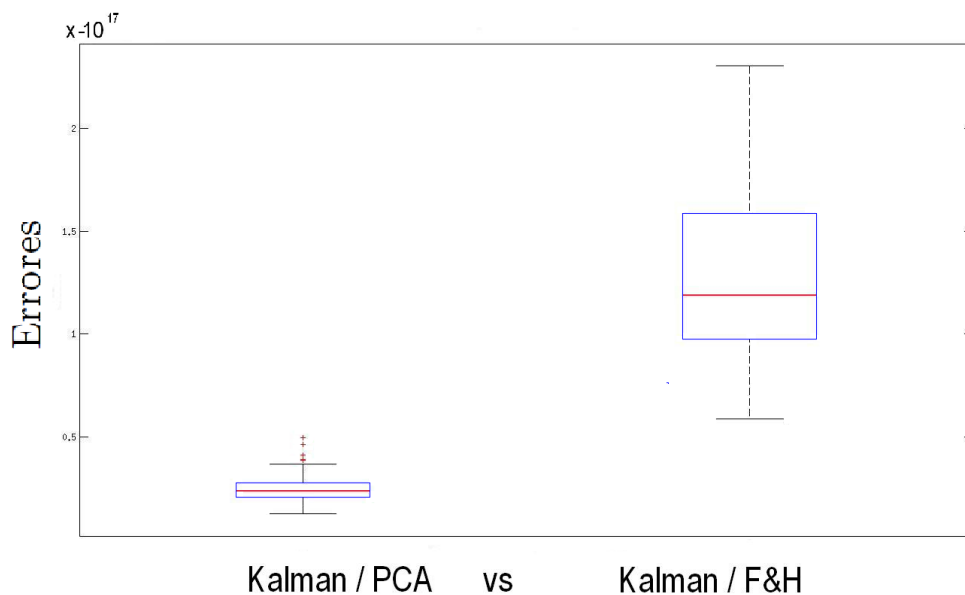


Figura 4.5: Diagrama de cajas con estimación Kalman. Se calcula para autofactores (PCA) y los factores F&H.

4.4. Ejemplos de estimaciones

En este apartado realizaremos pruebas sobre diferentes series temporales. Nuestro objetivo es el de controlar de forma aproximada que el paquete software desarrollado detecta correctamente las exposiciones. Trataremos de estimar la exposición a los factores del modelo F&H[3] de distintos fondos con el método de estimación mínimos cuadrados (definido en la sección 3.3.1).

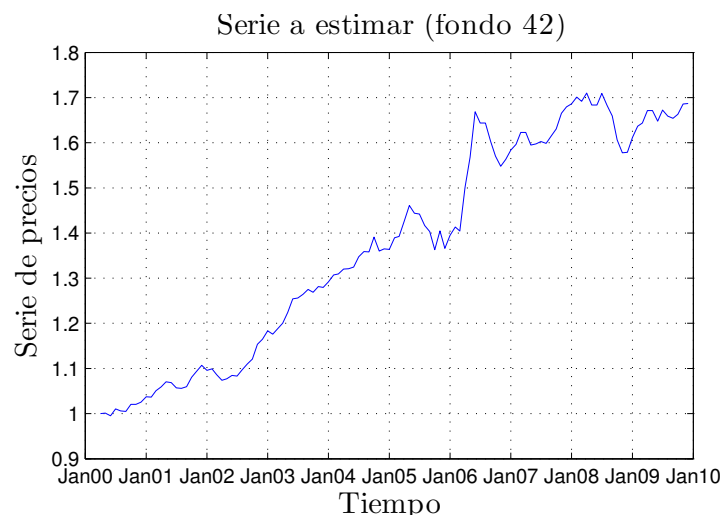


Figura 4.6: *Serie temporal de un fondo que se define como inversión en mercados emergentes.*

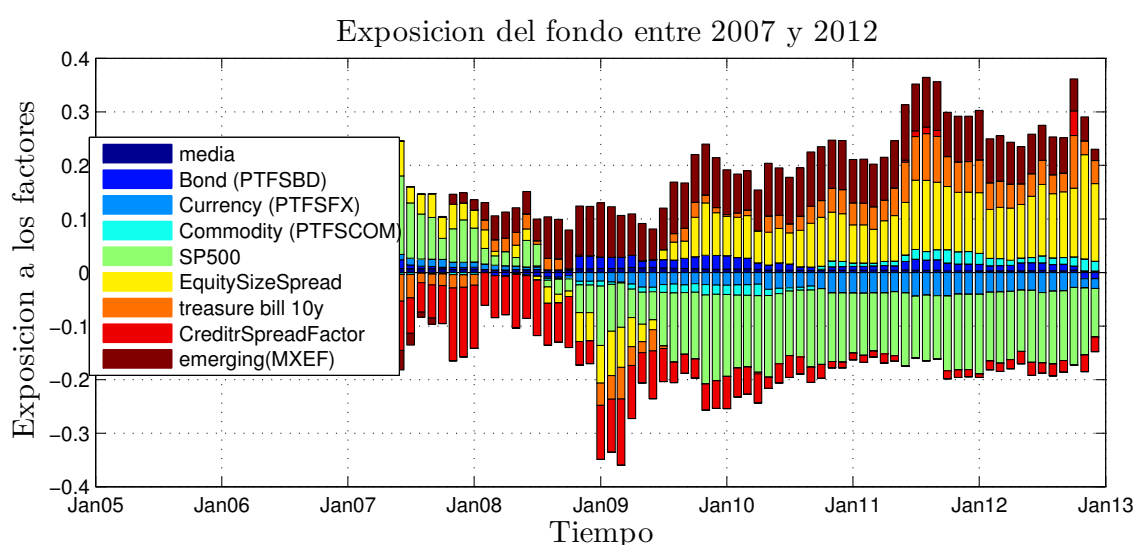


Figura 4.7: *Exposición a factores estimada de un fondo que se define como inversión en mercados emergentes.*

4.4.1. Ejemplos de estimación

Fondo emergente

En la figura 4.7 se puede ver un fondo (figura 4.6) cuyos gestores definen como inversión en mercados emergentes. Claramente, detecta una exposición positiva a este factor. De esta forma, el software nos ha permitido corroborar información que otros publican.

Fondo con inversión en norteamérica

En la figura 4.8 se puede ver un fondo cuyos gestores definen como inversión en norteamérica. Claramente, detecta una exposición positiva a este factor. De esta forma, el software nos ha permitido de nuevo corroborar información que otros publican.

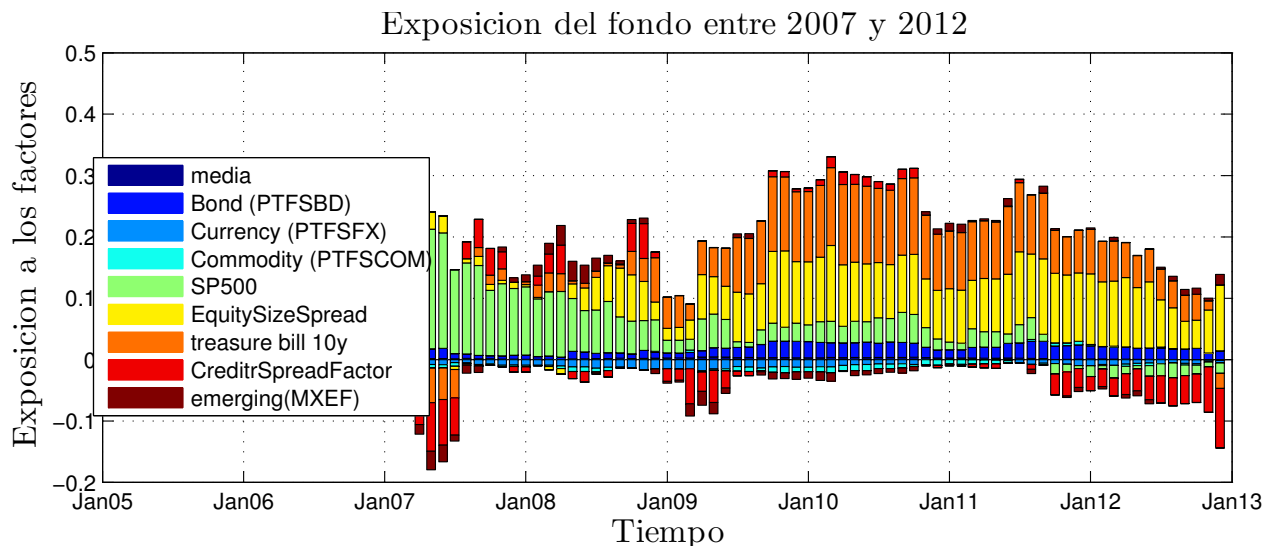


Figura 4.8: *Exposición a factores estimada de un fondo que se define como inversión en norteamérica.*

Comparativa de dos fondos

En la figura 4.9 se pueden ver dos fondos con comportamiento a priori parecidos, pero que al descomponerlos en los factores de los que dependen, se aprecia una composición muy diferente. De esta forma, el software nos ha permitido localizar composiciones que a priori no se detectan.

Estimación del fondo Eckhardt

Siguiendo la línea en [4], tratamos de estimar la exposición a los factores del modelo *Fama&French* (F&H) [3] (modelo usado en el estado del arte) del fondo de inversión *Eckhardt Futures* (figura 4.10), y el método de estimación será mínimos cuadrados (se define posteriormente en la sección 4). Contiene 8 factores con índices de bonos, tendencias y portfolios que están representados en la figura 4.1.

El objetivo es, usando tan sólo la información de la serie y la de los factores, tratar de estimar la exposición a factores de dicho fondo. La estimación obtenida se muestra en la figura 4.11. Una vez llegado a este punto, finaliza el proceso cuantitativo, pudiendo extraer bastantes conclusiones cualitativas:

1. La gestión de este fondo está realizada de un modo realmente dinámico, variando las exposiciones frecuentemente con el tiempo.
2. La “exposición general” a los factores, que se definiría como la resta de los valores positivos con los valores negativos, es en 2006 cercana al 0%. Sin embargo, en los siguientes dos años, la exposición se vuelve netamente negativa, pasando posteriormente a ser positiva, y volviéndose a acercarse al 0% en los últimos años.
3. Sin embargo, una exposición negativa, también es un riesgo, ya que en caso de buen comportamiento del factor, nuestro portfolio tenderá a comportarse de forma negativa. Por tanto, la exposición total a los factores, medida como la suma de las exposiciones negativas y positivas o altura total de las barras, es otro componente analizable. Este valor se encuentra generalmente durante estos años en el intervalo 1,5 – 2, exceptuando el periodo inicial del año 2006.

Dos fondos con comportamiento similar

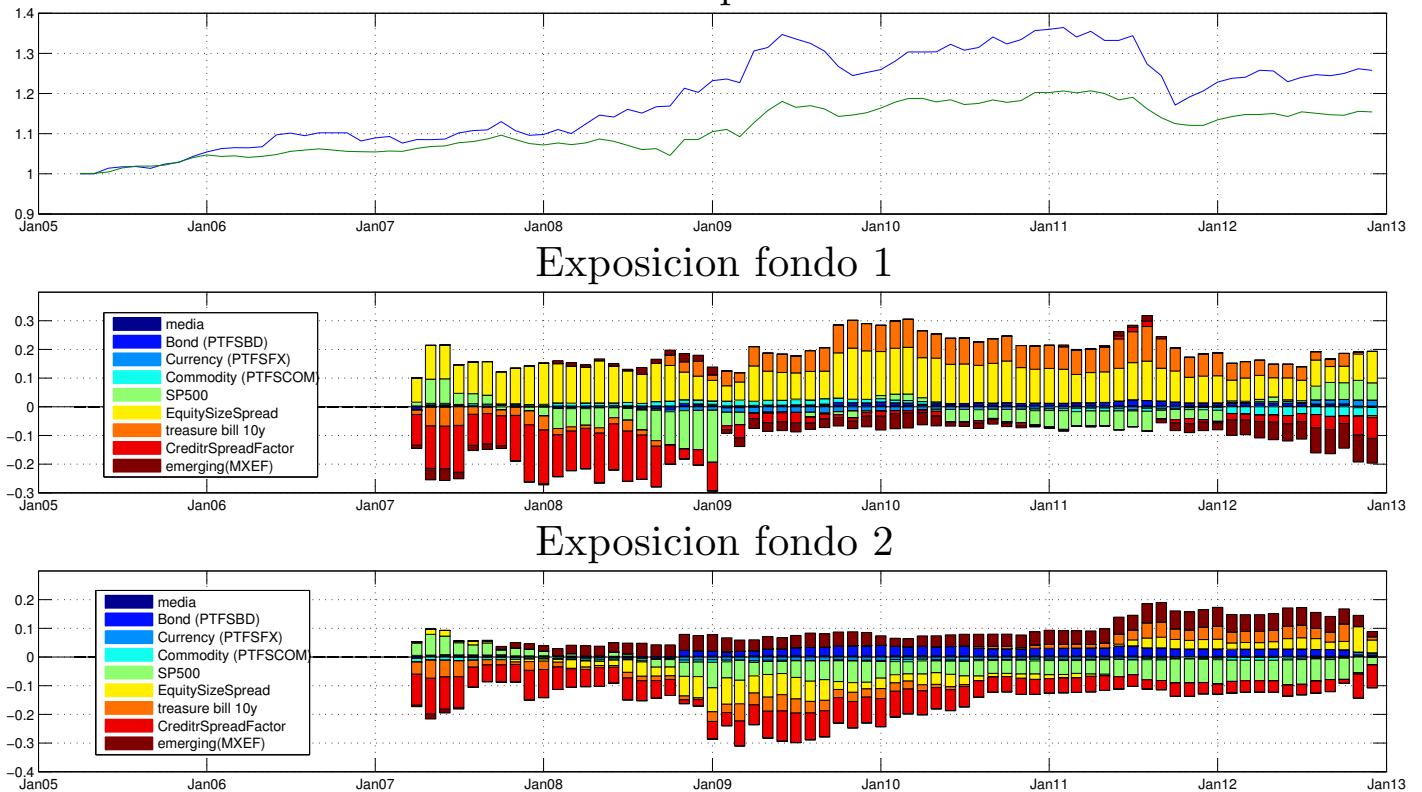


Figura 4.9: Dos fondos de inversión con comportamiento similar a priori, pero cuya descomposición y dependencias son diferentes.

- Es un fondo con una exposición negativa al índice S&P 500 (índice bursátil de los EE.UU.). Comportamientos negativos del S&P 500 tenderán a influenciar positivamente a nuestro fondo.

4.5. Fusión

4.5.1. Introducción sobre fusión de sistemas

En el ámbito del aprendizaje automático o reconocimiento de patrones informalmente se habla de la inexistencia de *no free lunch*, es decir, no existe un clasificador óptimo para cualquier distribución de datos. Es por eso, que la selección del clasificador óptimo debe realizarse para el problema concreto.

En muchas ocasiones, existe más de un clasificador válido para un mismo problema. En ese caso, se puede plantear usar un nuevo algoritmo que reuna, de algún modo, la información que aporta cada uno de los clasificadores. Este mecanismo es especialmente útil, en el caso de que los clasificadores aporten información complementaria, por ejemplo, que sus tasas de error sean menor en distintas topologías de datos. La fusión de sistemas también tiene especial relevancia en ámbitos en que los datos de entrenamiento son escasos, este es el caso de la ingeniería financiera.

La fusión presenta varias ventajas:

- Evita la peor estimación.



Figura 4.10: *Serie temporal del fondo Eckhardt.*

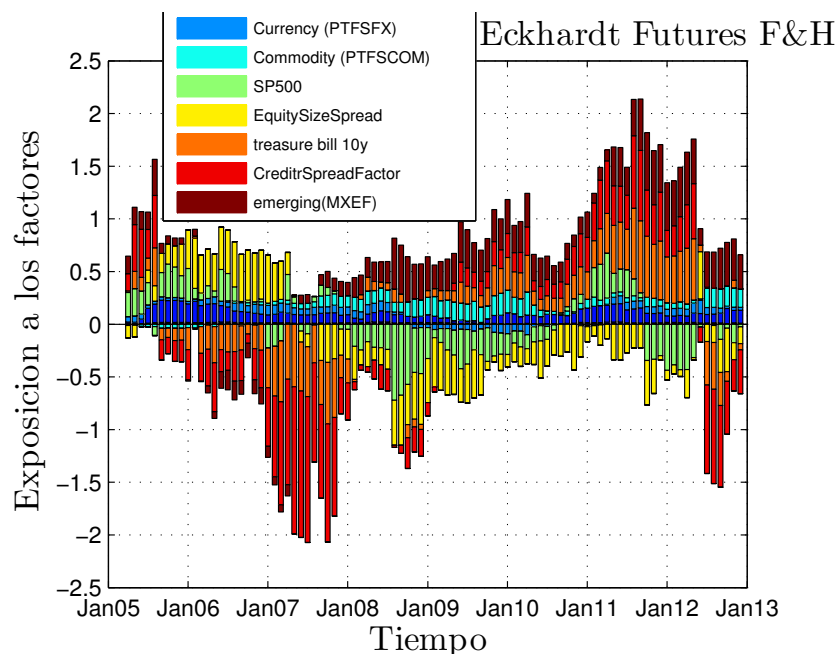


Figura 4.11: *Exposición a los factores de riesgo estimado por mínimos cuadrados para el fondo Eckhardt [4].*

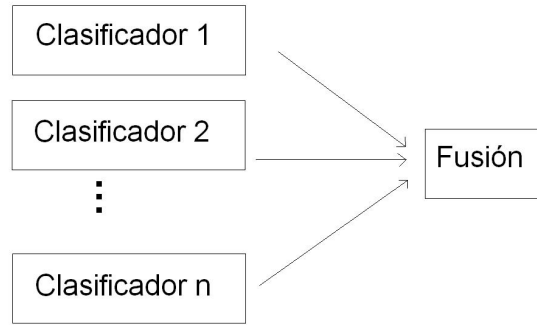
2. Consigue mejorar en determinados casos al mejor de los algoritmos.

En nuestro caso, realizaremos una fusión en paralelo tal y como muestra la figura 4.12.

En el caso de análisis multifactor, los distintos mecanismos de estimación de la exposición pueden ser de alguna manera complementarios. En momentos de cambios suaves en la exposición de las series, usar ventanas de tiempo grandes permite obtener más datos y hacer una estimación más robusta de la exposición real de las carteras. Por otro lado, en momentos de cambios de exposición, usar ventanas de tiempo más cortas evita usar datos atrasados que pueden llevar a un aumento del error.

4.5.2. Fusión en análisis multifactor

Sin embargo, no se dispone de un medidor de la variación de la exposición β (de hecho, β es la propia variable que estamos tratando de estimar). La línea seguida para disponer de dicho

Figura 4.12: *Mecanismo de fusión.*

medidor es obtener un nivel de ajuste de los datos a partir de la ecuación 3.7 según la ecuación 4.1:

$$Bondad = \min(\sum_{t'=t-h}^t (\sum_{i=1}^K \beta_{i,t'} f_{i,t'} - r_{t'})) \quad (4.1)$$

De esta forma estaríamos usando el error de minimización en el ajuste de los datos como medida a priori del error de exposición¹.

Con el fin de motivar y justificar este procedimiento, en el anexo A se ha realizado un análisis de la relación que guardan el error de minimización con el error de exposición final.

En este punto, cabe resaltar que el error de minimización puede no sólo reflejar la variabilidad de la exposición de los datos (motivación inicial del planteamiento), sino también cualquier otro tipo de cambio que se pudiese producir en la exposición.

La estimación planteada tiene entonces dos pasos diferenciados:

1. Se realizan k (4 en nuestros experimentos) estimaciones de la exposición para distintas ventanas deslizantes. Para cada momento t obtenemos, por tanto, k estimaciones $\hat{\beta}_t$ de la exposición y k escalares que miden la bondad de la exposición.
2. Para cada momento t , seleccionamos la estimación $\hat{\beta}_t$ con menor error de minimización obtenido según la ecuación 4.1.

Este mecanismo de fusión, representado en la figura 4.13, obtendrá (como se verá en la siguiente subsección experimental 4.6) mejores resultados de estimación.

Existe una desventaja en el uso de la metodología de fusión: la estimación final es poco homogénea, es decir, las estimaciones $\hat{\beta}$ entre días contiguos pueden ser muy variables, al venir de algoritmos de estimación diferentes. Aunque disminuya la tasa de error de exposición, visualmente se aprecia una variación que no se produce en los datos reales.

¹La medida de bondad en la ecuación 4.1 debe ser normalizada en función del tamaño de la ventana deslizante, ya que ventanas deslizantes de tamaño mayor se ven penalizadas en dicha función de coste por el hecho de tener más datos.

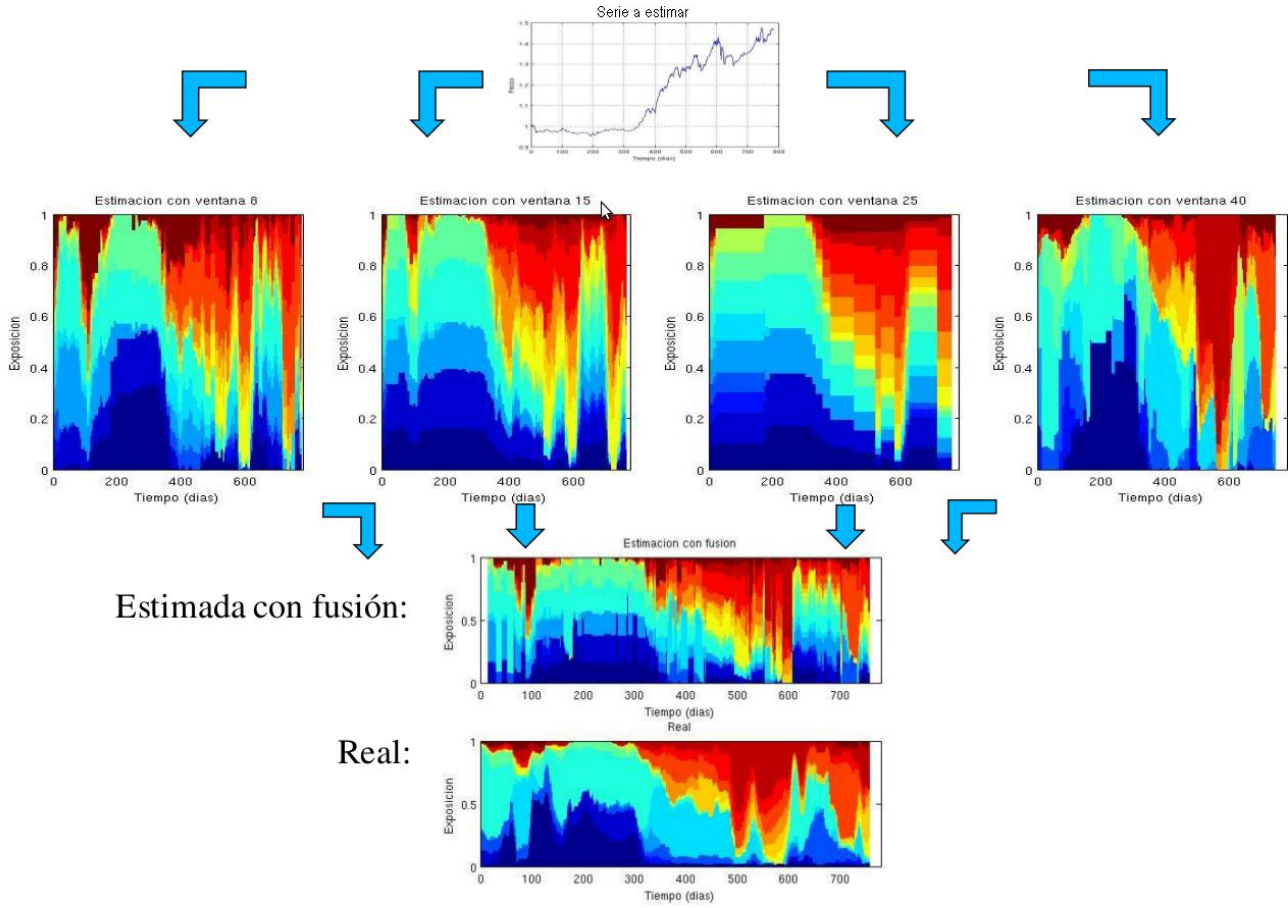


Figura 4.13: Mecanismo de fusión usado y exposición real. De la serie y sus factores, obtenemos cuatro modelos diferentes de $\hat{\beta}$. Fusionando para cada t , obtenemos la estimación $\hat{\beta}$ final, que vemos se parece a β real.

4.6. Detección de la inversión

Las pruebas realizadas hasta este punto han sido realizadas con la función de coste de reconstrucción de la serie de la sección 3.2.3. Sin embargo, el error de reconstrucción no consigue capturar ni modelar la exactitud de la estimación por distintos motivos:

1. No es capaz de capturar la correlación entre los factores, y por tanto, la reconstrucción de la serie a partir de sus factores podría no significar veracidad, ya que la dependencia podría venir de otro factor correlado.
2. No penaliza el número de factores usados. Esta función de error no penaliza el sobreaprendizaje de los datos. Es decir, esta función de coste no penaliza añadir nuevos factores al modelo, y por tanto, añadiendo factores, se consigue reducir siempre (o como poco mantener) el error de reconstrucción.

4.6.1. Funcion/es de coste

Esto motivó una línea de trabajo en sí misma, que fue generar una función de coste adecuada a este problema de estimación de exposición a factores. El objetivo es el de conocer la exposición exacta del fondo. Nos gustaría medir el error de la siguiente forma:

$$Error = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K (\beta_i - \hat{\beta}_i) \quad (4.2)$$

Sin embargo, no se puede disponer de la exposición real de un fondo $\hat{\beta}$, ya que son dependencias cualitativas. Es decir, nunca se podrán obtener unos datos de test reales con los que comparar exactamente nuestra estimación. Este problema imposibilita de forma definitiva el usar la función de error de la ecuación 4.2 para el problema de exposición a factores.

Ante la imposibilidad de resolver dicho problema, la alternativa planteada será la de resolver un problema “dual” al de exposición a factores: el problema de inversiones. Este problema podría explicarse de forma informal como la cantidad invertida en el fondo por cada uno de los factores.

El problema pasa de ser el definido en la ecuación 3.7 al definido en la ecuación con restricciones 4.3.

$$\hat{\beta}_t = \min_{\beta} \left(\sum_{t'=t-h}^t \left(\sum_{i=1}^K \beta_{i,t'} f_{i,t'} - r_{t'} \right) \right)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^K \beta_{i,t} = 1 \quad \forall t \quad (4.3)$$

Adicionalmente, para simplificación del problema, añadiremos la siguiente restricción adicional:

$$\beta_{i,t} \geq 0 \quad \forall t \quad (4.4)$$

Es decir, las inversiones deben ser positivas².

El marco de trabajo proporcionado por las ecuaciones 4.3 y 4.4 nos permite usar la función de coste deseada 4.2, por ejemplo generándonos inversiones sintéticas que cumplan con las restricciones³.

Veamos algún ejemplo simple que hemos generado de forma sintética: generamos un fondo que esté equidistribuido en su inversión entre los $K = 8$ factores:

$$\beta_{i,t} = \frac{1}{K} = \frac{1}{8} \quad (4.5)$$

realizando la estimación con las técnicas descritas en esta sección, mostramos los resultados en la figura 4.14. Se ve como se detecta con bastante precisión.

Este paso, de extensión del problema a detección de inversiones, permitirá tener una función de coste, que permita probar los distintos algoritmos desarrollados, más consistente y realista. Además, los algoritmos que mejor funcionan para este problema, deberían comportarse bien en el problema dual de exposición a factores⁴.

²El concepto de inversión negativa se conoce como invertir en corto. El sistema financiero permite que se realice esta transacción mediante intermediarios, pero esta operación supone un riesgo mucho mayor que el que supone las inversiones positivas (inversiones en largo)

³Las investigaciones realizadas de forma inicial se hicieron sobre bases de datos sintéticas, sin embargo, las estimaciones eran muy precisas (errores menores del 1%). Se realizó una búsqueda de patrones de inversiones reales. Los resultados sobre dichos patrones reales son los que presentamos en este documento, ya que presentan un reto mayor con el que comparar nuestros sistemas de estimación.

⁴Es importante remarcar que la afirmación realizada no está probada en el documento, ni se tiene constancia de que se hayan publicado resultados al respecto. Sin embargo, hacemos la extensión de conclusiones debido a la

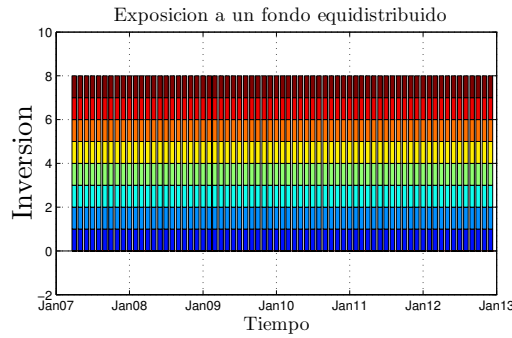


Figura 4.14: Estimación de inversión para fondo equidistribuido.

4.6.2. Usando conocimiento a priori

Sabiendo que las inversiones son en cierto modo tendenciales y que no varían con rapidez, podemos usar dicho conocimiento a priori. Al modelar en cierto modo estas dependencias temporales que suceden en la realidad, podemos incluir nuevas restricciones a la ecuación 3.7 (además de las ya existentes 4.3 y 4.4) en forma de una cota C :

$$\hat{\beta}_{t-1} - C < \hat{\beta}_t < \hat{\beta}_{t-1} + C \quad (4.6)$$

4.6.3. Resultados preliminares

La serie temporal en la que se prueba la detección de inversión y sus factores invertidos, se ha obtenido de forma privada. Esta serie invierte en $K=16$ factores. Igualmente, los porcentajes de inversión reales también son obtenidos a través de una línea privada (representados en la figura 4.3).

Si aplicamos el método de estimación de mínimos cuadrados de la sección 3.3.1 obtenemos los siguientes resultados:

Tamaño de la ventana deslizante (días)	8	15	25	40
Error (%)	6.5	5.9	5.6	5.6
Usando fusión(%)	5.5			

Los mejores resultados se obtienen para ventanas de tiempo grande (figura 4.15). Este resultado es razonable ya que usar datos de 8 días para estimar la inversión a 16 factores parece no ser suficiente. Las mejoras llegan a su punto de saturación cuando el número de días es ya superior al número de factores.

Realizando una fusión según se detalla en la sección 4.5.2 (figura 4.16) conseguimos un error del 5,5% que no sólo es mejor que el peor de los casos sino que es mejor que cualquiera de los resultados. Sin embargo, los resultados, aunque analíticamente aceptables, son cualitativamente poco realistas ya que existe mucha desviación en la estimación de un día para otro (de forma “apilada” en la figura 4.17), es decir, las inversiones varían mucho de un día para otro. Esto no es algo que pase comunmente en escenarios financieros.

Estos resultados pueden ser mejorados haciendo uso del FK. Como decisión de diseño, decidimos implementar el valor real como la estimación realizada por mínimos cuadrados. Se presentan a continuación los resultados del FK:

similitud del problema y a que se ha considerado que los algoritmos funcionan de forma transversal a la función de coste.

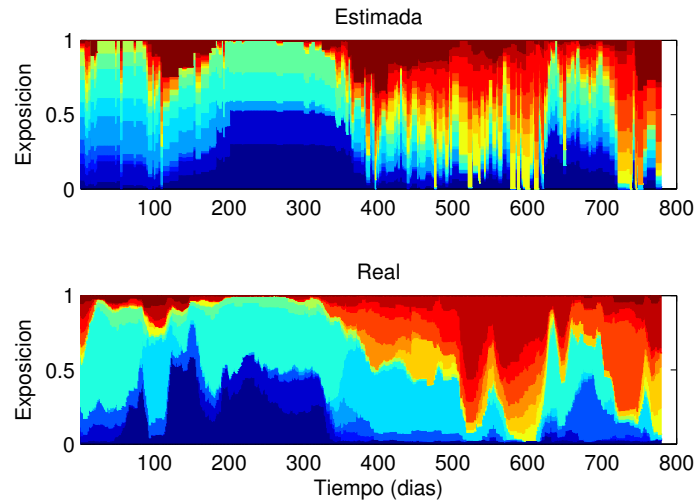


Figura 4.15: Primera estimación de la inversión realizada para los 16 factores.

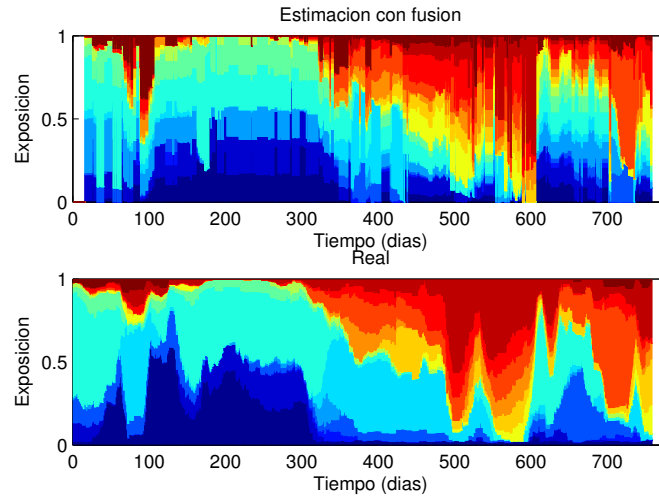


Figura 4.16: Estimación de la inversión realizada por el mecanismo de fusión para los 16 factores.

Tamaño de la ventana deslizante (días)	8	15	25	40
Error (%)	5.2	5.2	5.3	5.6
Usando fusión(%)	5.3			

Se puede apreciar como el FK mejora la estimación realizada por mínimos cuadrados excepto para la ventana de 40 días. Además, se obtiene mejores resultados para ventanas de menor tamaño. Esto parece también razonable ya que el objetivo del FK era no hacer uso de datos atrasados, o por lo menos, hacerlo de forma implícita. En este caso el FK y el mecanismo de fusión no funcionan mejor que el mejor de los casos, sin embargo, sí que es un resultado intermedio, que evita de esta forma, el peor de los casos.

También se ha probado una ligera modificación de la función de optimización: midiendo en el espacio L^2 en lugar de L^1 . De forma analítica:

$$\hat{\beta}_t = \min_{\beta} \sqrt{(\sum_{t'=t-h}^t (\sum_{i=1}^K (\beta_{i,t'} f_{i,t'} - r_{t'}))^2)} \quad (4.7)$$

dando lugar a los siguientes resultados:

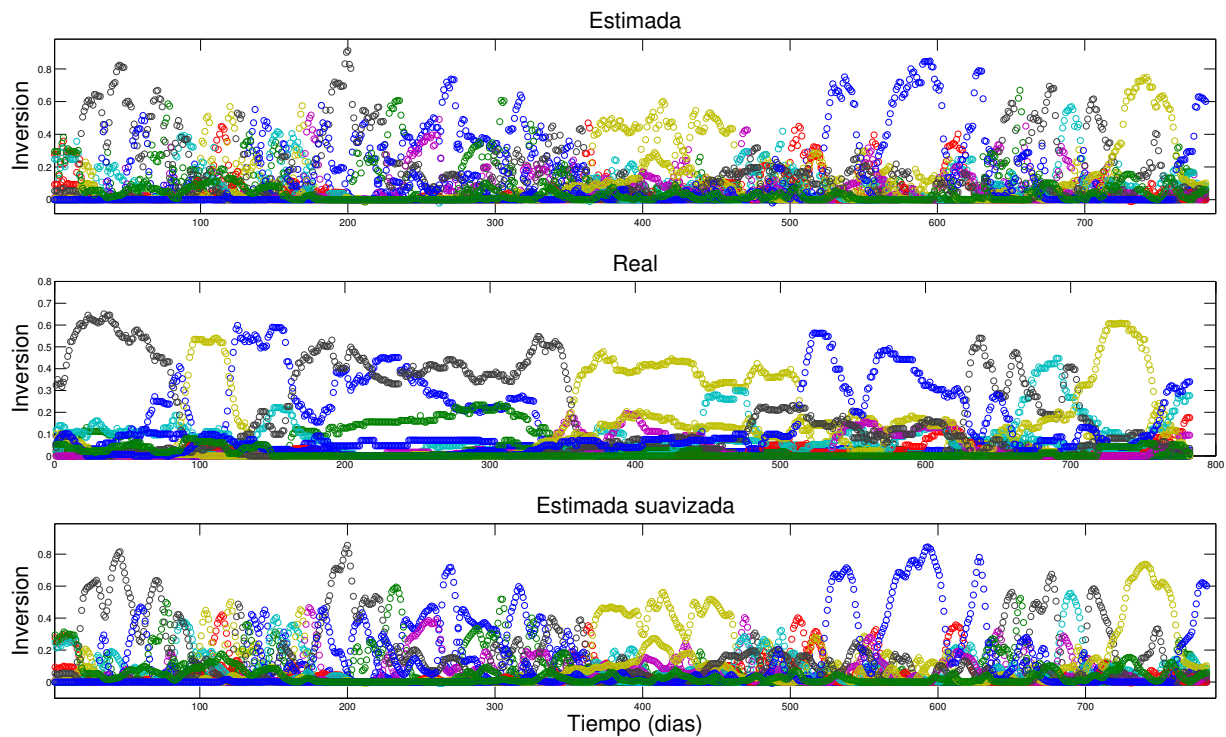


Figura 4.17: (a) Estimación de la inversión según método de mínimos cuadrados. (b) Real. (c) Estimación suavizada por el Filtro Kalman.

Tamaño de la ventana deslizante (días)	8	15	25	40
Error sin usar Kalman(%)	6.4	5.2	4.8	4.5
Error usando Kalman(%)	5.2	5.3	4.9	4.8
Usando fusión(%)	5.3			

Los resultados también mejoran sobre los que se optimizaba con la norma L^1 . Se sigue apreciando como Kalman mejora los resultados en los casos de ventanas deslizantes pequeñas. Sin embargo, en este espacio, la fusión parece no aportar al resultado global.

Una prueba que hemos realizado y que creemos es interesante ha sido la de realizar el algoritmo PCA sobre los factores, como paso previo a la ejecución del sistema de análisis multifactor. El desarrollo se ha llevado a un anexo (anexo C).

Los resultados obtenidos con la restricción $C = 0,1$ son los siguientes:

Tamaño de la ventana deslizante (días)	8	15	25	40
Error sin usar Kalman(%)	6.3	5.3	4.8	4.6
Error usando Kalman(%)	6.4	5.3	5	5
Usando fusión(%)	5.2			

Que son muy parecidos a los resultados obtenidos hasta ahora. Sin embargo, nos permite confirmar el mecanismo de cota como otro parámetro configurable con el que optimizar el problema. En este caso, el FK pierde eficacia (ya que se dispone de información de suavizado que es el punto en donde el FK obtiene ventaja sobre el resto de algoritmos), y se diluye su ventaja.

Usando otros valores de cota como $C = 0,05$ los resultados empeoran:

Tamaño de la ventana deslizante (días)	8	15	25	40
Error sin usar Kalman(%)	6.5	5.7	5.2	5.5
Error usando Kalman(%)	6.5	5.9	5.4	5.8

Igualmente los resultados con cotas $C = 0,08$ o $C = 0,15$ dan peores resultados. Es decir, valores muy pequeños de la cota, son muy restrictivos y no consiguen capturar bien los resultados del modelo. De igual forma, valores muy grandes no suponen ninguna mejora al sistema. Es importante recalcar que el conocimiento a priori no se dispondrá en todos los sistemas reales. Sin embargo, es una herramienta que hemos analizado para los casos en los que sí que se disponga dicha información.

4.6.4. Optimización de parámetros

Como experimento global se realizó una prueba con configuraciones de parámetros diferentes. Es decir, tratar de realizar de forma conjunta un experimento que saque los mejores parámetros del marco de trabajo desarrollado en este TFM. En forma de rejilla exhaustiva, se probarán todas las posibles combinaciones de los siguientes parámetros.

- Distintas cotas C : 0.03, 0.05, 0.1, 0.15 e infinito.
- Distintos tamaños de ventana deslizante: 8, 15, 25 y 40 días.
- Distintas normas de medida del error: (no sólo L^1 y L^2): 0.7, 1, 1.5, 1.7, 1.85, 2 y 3.
- Distintos tipos de ponderación de los días⁵.

Este experimento ha necesitado gran capacidad de cómputo ya que se han tenido que calcular 840 estimaciones completas y errores cometidos, y hubiese sido muy complicado si el grupo ATVS no dispusiera de un conjunto de servidores de cómputo como el que dispone.

Los resultados finalmente establecidos y que menor error cometen (figura 4.18) tiene la siguiente configuración de parámetros:

- $C = 0,1$.
- Ventana deslizante de 8 días.
- Norma $L^{1,5}$.
- Ponderación uniforme de los datos.
- Usando mínimos cuadrados.

Veamos los resultados obtenidos por otras configuraciones de parámetros:

Error sin ponderación (ponderación uniforme) (%)	4.6
Error con ponderación (ponderación lineal) (%)	5.1

⁵La ponderación es un mecanismo por el cual se da más peso a los últimos días, aumentando su importancia para optimizar nuestra función de coste.

Error con exponente 0.7 (%)	5.6
Error con exponente 1 (%)	5.7
Error con exponente 1.5 (%)	4.6
Error con exponente 1.7 (%)	5.6
Error con exponente 1.85 (%)	6.6
Error con exponente 2 (%)	6.9
Error con exponente 3 (%)	8.0

Error con ventana de 8 días (%)	4.6
Error con ventana de 15 días (%)	5.0
Error con ventana de 25 días (%)	5.5
Error con ventana de 40 días (%)	5.6

Error con cota 0.03 (%)	4.8
Error con cota 0.05 (%)	4.7
Error con cota 0.10 (%)	4.6
Error con cota 0.15 (%)	5.0
Error sin cota (%)	4.7

El filtro Kalman tiene un 4,7% de error. Es mayor error que mínimos cuadrados, ya que incorporar información a priori ayuda en la estimación del error haciendo nula la aportación del FK.

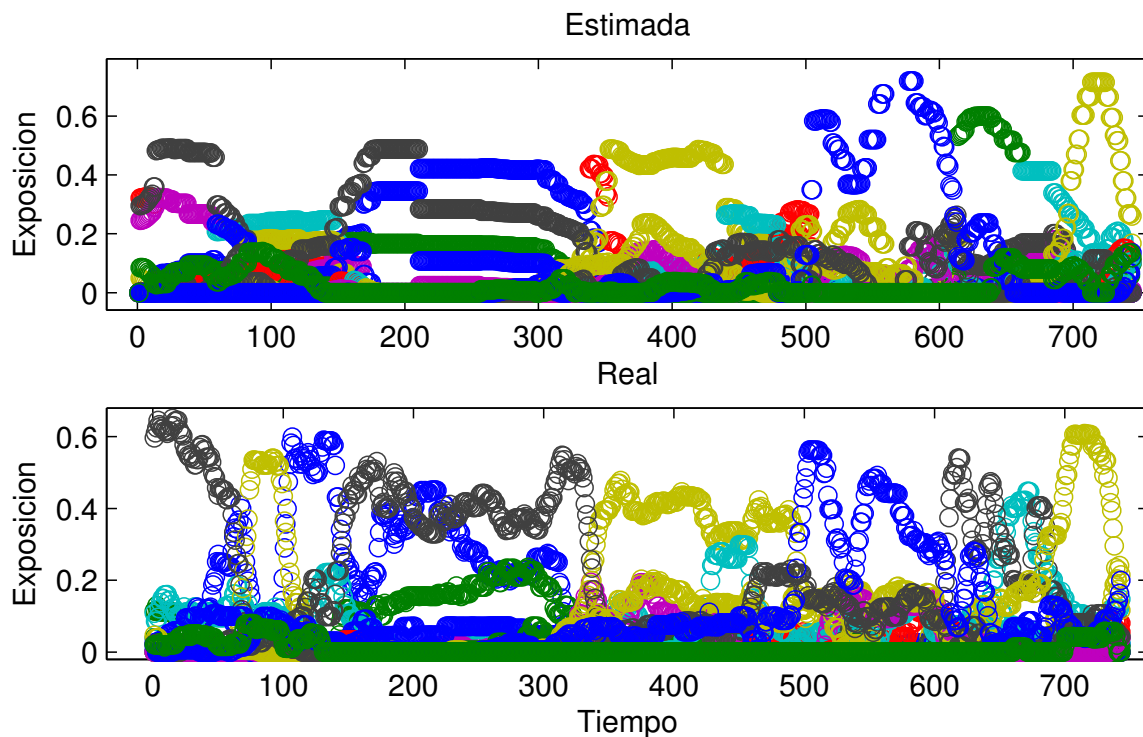


Figura 4.18: Resultado de la mejor estimación.

Como conclusión del apartado experimental, podemos decir que una vez implementado los sistemas desarrollados en la sección 3, los errores se encontraban en un intervalo $[5,2\% - 6,5\%]$. Sin embargo, el trabajo experimental desarrollado nos ha permitido reducir ese error a un 4,6%.

5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

En este TFM hemos presentado un análisis de los modelos multifactor en la ingeniería financiera. Se ha presentado la metodología de estimación usada, así como los métodos de extracción de factores. Se ha conseguido desarrollar un paquete software que implemente estos mecanismos. Adicionalmente se aporta un mecanismo de fusión de estimaciones que permite mejorar los procedimientos clásicos. Mediante una batería exhaustiva de pruebas, se ha tratado de hacer una valoración de la bondad de cada uno de los métodos. Las principales conclusiones del Trabajo Fin de Master se resumen a continuación.

1. PCA y FA son técnicas válidas y de utilidad práctica a la hora de gestionar carteras de inversiones. Extraen información relevante para representar mejor los datos. Esto puede conducir a una optimización de la inversión. Adicionalmente, se ha visto cómo estos algoritmos permiten un análisis de la inversión de nuestro portfolio y del de otros.
2. Hemos desarrollado un software capaz de detectar la exposición de una serie temporal a otras series.
3. Hemos desarrollado un marco de optimización para la mejora en la estimación realizada.
4. Hemos realizado una adaptación del problema de exposición a factores a un problema de detección de inversiones.
5. Hemos incorporado técnicas de procesado de señal como el filtro Kalman y se han visto que son también herramientas útiles y con aplicación práctica.
6. Se ha realizado con éxito la fusión de distintos sistemas, que ha permitido realizar estimaciones más precisas, con una nueva metodología para el estado del arte.

5.2. Trabajo futuro

Al ser una primera aproximación al problema, se puede realizar aún mucho desarrollo e introducir muchas mejoras. Aunque alguno de los planteamientos de trabajo futuro son intuiciones desarrolladas durante la actividad investigadora, la mayor parte son derivaciones directas del trabajo realizado y de los que se tiene una idea clara de cómo abordarlos.

1. Se pretende desarrollar un detector de *actividad anormal*, que permita detectar comportamientos anómalos de una serie a partir de comportamientos no explicados por el modelo desarrollado. De esta forma, se podría detectar cuando una serie temporal financiera entra en un estado de comportamiento distinto.
2. Se pretende que el marco de optimización desarrollado pueda dar lugar a una nueva funcionalidad: *análisis de rendimiento*. Se pretende medir aquellos comportamientos no dependientes de los factores, que podrían estar relacionados con la cualidad del gestor del fondo a la hora de la selección de las inversiones.
3. La existencia de determinados eventos políticos, económicos y financieros puede producir cambios en la exposición de los fondos y en el comportamiento. Creemos que un *analizador de eventos* podría ser una extensión natural al trabajo realizado en este Trabajo Fin de Master. Esto se puede conseguir mediante un análisis en las ventanas de tiempo cercanas al evento.
4. Análisis de tipos de portfolio. Aunque el software desarrollado permite medir de forma cualitativa los distintos tipos de portfolios, se podría intentar cuantificar de forma analítica dichos comportamientos.

Glosario de acrónimos

- **TFM**: Trabajo Fin de Master
- **PCA**: Principal Component Analysis
- **FA**: Factor Analysis
- **FK**: Filtro Kalman
- **F&H**: Fama and French multifactor model

Bibliografía

- [1] Girish Ganesan. A subspace approach to portfolio analysis. *IEEE Signal Process. Mag.*, 28(5):49–60, 2011.
- [2] Mustafa U. Torun, Ali N. Akansu, and Marco Avellaneda. Portfolio risk in multiple frequencies. *IEEE Signal Process. Mag.*, 28(5):61–71, 2011.
- [3] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33:3–56, 1993.
- [4] Emmanuelle Jay, Patrick Duvaut, Serge Darolles, and Arnaud Chrétien. Multifactor models. *IEEE Signal Process. Mag.*, 28(5):37–48, 2011.
- [5] Bartholomew. Latent variable models and factor analysis. *Charles Griffin Co. Ltd*, 1987.
- [6] Javier Gonzalez-Dominguez, Brendan Baker, Robbie Vogt, Joaquin Gonzalez-Rodriguez, and Sridha Sridharan. On the use of factor analysis with restricted target data in speaker verification. In *Odyssey 2010*, 2010.
- [7] Benoit B. Mandelbrot. The (mis)behavior of markets: A fractal view of risk, ruin, and reward. In *M Richard L. Hudson. New York: Basic Books*, 2006.
- [8] Christopher M. Bishop. Latent variable models. In *Learning in Graphical Models*, pages 371–403. MIT Press, 1999.
- [9] Robert C. Merton. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(4):1851–1872, 1972.
- [10] H. Varian. Bootstrap tutorial. *Mathematica Journal*, 9:768–775, 2005.
- [11] Louis K. C. Chan & Jason Karceski & Josef Lakonishok. The risk and return from factors. *NBER, National Bureau of Economic Research, Inc.*, 6098, 1997.
- [12] Sharon Gannot and Arie Yeredor. The kalman filter. In Jacob Benesty, M.Mohan Sondhi, and Yiteng(Arden) Huang, editors, *Springer Handbook of Speech Processing*, pages 135–160. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [13] J. D. Hamilton. Time series analysis. In *Princeton, NJ: Princeton University Press*, 1994.



Relación Minimización-Estimación

Análisis de correlación entre error de minimización y error de estimación

Para motivar el uso de las técnicas de fusión presentadas en el documento, se ha realizado un análisis de la correlación que guardan el error de minimización y el error de exposición final. El objetivo es medir, de forma cuantitativa, la idoneidad y necesidad de las técnicas de fusión en este sistema. Para ello, haremos uso de la ecuación 4.1.

En las siguientes gráficas dibujamos para cada uno de los sistemas de ventanas deslizantes usados en este proyecto, una gráfica en la que se pretende se visualice de forma gráfica la relación entre ambas.

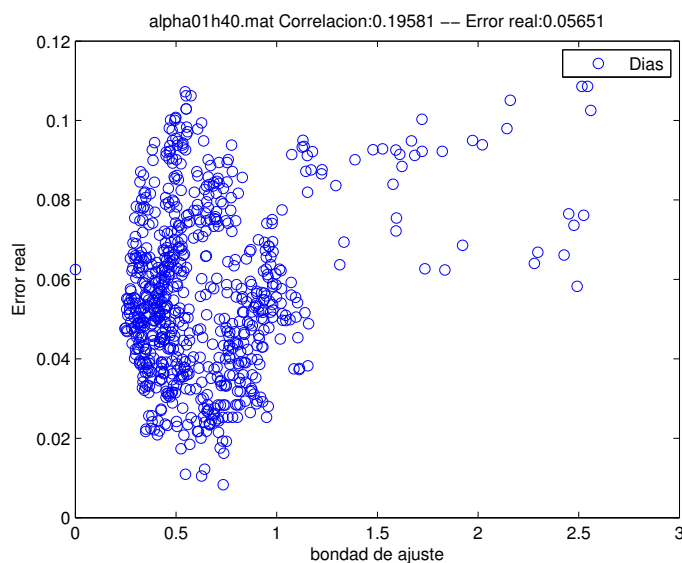


Figura A.1: Se representa para cada día estimado: Bondad de ajuste (ecuación 4.1) vs Error exposición final.

Podemos ver cómo los puntos con un error grande de minimización (bondad de ajuste), son puntos que generalmente tienen un error real grande de la exposición. Dicha relación puede medirse con la correlación entre ambas variables. En caso de ser positiva, los datos refrendarán las motivaciones hechas en este apartado del proyecto.

Las correlaciones de los 4 sistemas de ventanas deslizantes (con distintos tamaños de ventana deslizante) son los siguientes:

Tamaño de la ventana deslizante (días)	8	15	25	40
Correlación	0.07	0.05	0.08	0.19

Podemos ver cómo las correlaciones son positivas, motivando de forma cuantitativa la realización de la investigación en la fusión de los distintos sistemas.

B

PCA

El objetivo del algoritmo es reducir la dimensionalidad. Extrae las dimensiones que conservan la mayor varianza posible (varianza como unidad de información retenida). De esta manera, se consigue reducir la dimensionalidad del problema extrayendo la mayor cantidad posible de información de los datos.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ el vector de características de los datos. El algoritmo realiza una proyección lineal de la forma:

$$y = W \cdot x \quad (\text{B.1})$$

siendo $y \in \mathbb{R}^k$ $k < n$.

El algoritmo es el siguiente:

1. Se calcula la matriz de covarianza de los x , C .
2. Se diagonaliza dicha matriz C tal que: $C = VDV'$, siendo D una matriz diagonal con los autovalores y V una matriz ortogonal¹ con los respectivos autovectores. Además se ordena en orden decreciente del tamaño de los autovalores.
3. Se seleccionan los k autovalores mayores. La matriz V_k formada por los k correspondientes autovectores es la matriz de transformación W .

La selección del valor k se puede determinar respecto al porcentaje total de la información que se quiere retener. El porcentaje total de información explicada por los k primeros autovalor/autovector es

$$I = \frac{\sum_j^k \lambda_j}{\sum_i^n \lambda_i} \quad (\text{B.2})$$

Los errores aumentan al disminuir la cantidad de información total. Sin embargo las necesidades computacionales son mucho menores, e incluso puede darse el caso de aumentar la robusted debido a que los autovalores más pequeños estén realmente modelando patrones ruidosos y produciendo sobreaprendizaje.

¹Una matriz X es ortogonal si $X \cdot X' = I$.

Es importante realizar una normalización de los datos con media cero y varianza unidad para un funcionamiento óptimo del algoritmo.



PCA sobre los factores

Adicionalmente a los experimentos realizados, se ha realizado una prueba de reducción de dimensionalidad sobre los factores. Se ha aplicado PCA sobre los factores de la inversión. El objetivo es tener menos factores, y de esta forma, poder usar menos días en la ventana deslizante. Al usar menos días, los datos usados son más recientes y por tanto, más fiables.

Usar PCA sobre los factores no debe confundirse con la obtención de factores mediante PCA desarrollado en el documento principal (sección 3.2.1). Usar PCA sobre factores predefinidos simplifica los factores obtenidos mediante alguno de los métodos descritos: variables macroeconómicas o extracción estadística. Es decir, sin llegar a decir que son procedimientos independientes, sí que podemos afirmar que actúan en diferentes puntos del sistema.

El experimento realizado ha sido el experimento global con todas las variantes de parámetros en rejilla exhaustiva. Posteriormente, he dibujado un diagrama de cajas con los errores medios de cada uno de los experimentos (figura C.1). Los errores mínimos y medianas de los errores cometidos son los siguientes:

Información retenida (%)	100	98	95	75
Error mínimo (%)	4.6	5.5	5.3	6.0
Mediana del error (%)	5.2	5.9	6.3	6.6

Se puede ver como los errores aumentan al reducir la dimensionalidad. Es decir, la motivación con la que realizábamos el experimento resultó fallida. Aunque seguimos pensando que la reducción de la dimensionalidad ayuda en la estimación de los parámetros, existen otras variables que afectan negativamente. El trabajo que hemos llevado a cabo nos lleva a afirmar que al realizar PCA sobre los factores, el sistema no es capaz de detectar diferencias entre los factores, que realmente es el objetivo de análisis multifactor. Precisamente la información retenida es la información común entre los factores, de menor importancia para este problema. La información desechada es la información no común, que es la que sirve para diferenciar unos de otros. Como trabajo futuro, nos planteamos realizar una variante del algoritmo PCA que suponga retener los autovalores más pequeños.

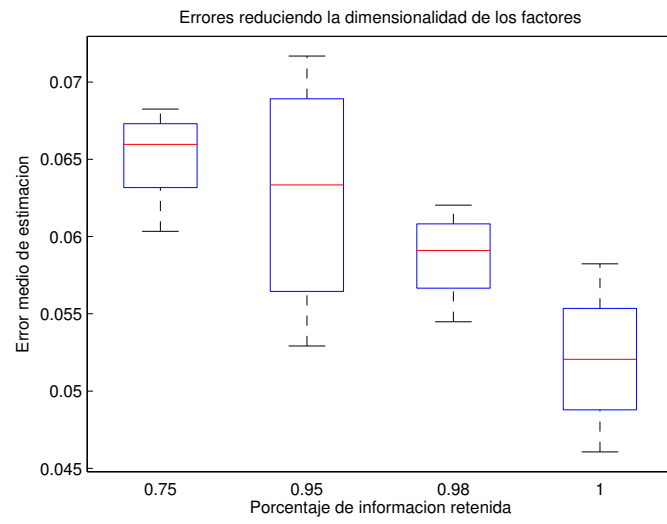


Figura C.1: *Diagrama de cajas de los errores cometidos para todos los experimentos en función del nivel de información retenido.*